ОБЪ ОПРЕДѢЛЕНІИ

МАКСИМАЛЬНЫХЪ И МИНИМАЛЬНЫХЪ СВОЙСТВЪ

ПЛОСКИХЪ КРИВЫХЪ

Проф. **Н. Я. Сонина**.

(Посвящается **А. Ю. Давидову**).

Главная задача варіаціоннаго исчисленія состоитъ, какъ извѣстно, въ опредѣленіи кривыхъ линій и поверхностей, которыя обладаютъ, на всемъ своемъ протяженіи или въ опредѣленной части, данными максимальными или минимальными свойствами. Обыкновенно свойство, о которомъ идетъ рѣчь, находитъ свое аналитическое выраженіе въ томъ, что нѣкоторый опредѣленный интегралъ, содержащій неизвѣстную ординату искомой кривой линіи или поверхности и ея производныя различныхъ порядковъ, имѣетъ вдоль искомой кривой большую или меньшую величину, нежели вдоль всѣхъ смежныхъ кривыхъ. Опредѣленіе искомой кривой линіи или поверхности приводится къ интеграціи дифференціальнаго уравненія, обыкновеннаго или съ частными производными, и входящія въ интегралъ произвольныя постоянныя или функціи опредѣляются при посредствѣ предѣльныхъ условій.

Такимъ образомъ данное максимальное или минимальное свойство, въ соединеніи съ предѣльными условіями, оказывается характеристическимъ для кривой линіи или поверхности и опредѣляетъ ихъ вполнѣ.

Но одна и та же данная линія или поверхность можетъ имѣть различныя характеристическія свойства и въ числѣ ихъ различныя максимальныя и минимальныя свойства. Изысканіе этихъ послѣднихъ является слѣдовательно частною задачею въ изученіи кривыхъ линій и поверхностей, задачею, которая можетъ быть легко формулирована аналитически, если ограничиться тѣми изъ этихъ свойствъ, которыя приводятся къ обыкновеннымъ вопросамъ варіаціоннаго исчисленія. Но даже эта ограниченная задача представляется недоступною для рѣшенія во всей своей общности, такъ что приходится прибѣгнуть къ новымъ ограниченіямъ. Эти послѣднія будутъ касаться двухъ пунктовъ, именно содержимаго подъинтегральной функціи, форму которой нужно опредѣлить, и самой данной кривой или поверхности, которая должна быть разсматриваема какъ относящаяся къ тому или другому семейству.

Мы ограничиваемся здѣсь разсмотрѣніемъ случая, когда подъинтегральная функція содержитъ производныя не выше перваго порядка и когда данная кривая относится къ семейству, опредѣляемому дифференціальнымъ уравненіемъ втораго порядка. Мы указываемъ пріемы для составленія этого уравненія по данному конечному уравненію кривой и подвергаемъ подробному изслѣдованію уравненіе втораго порядка вида

$$y\,\frac{d^2y}{dx^2} = \Theta\left(\frac{dy}{dx}\right),$$

которое можетъ быть найдено для каждой кривой. Между прочимъ мы занимаемся вопросомъ о возможности построенія кривой, удовлетворяющей этому уравненію, черезъ двѣ *данныя* точки плоскости. Извѣстно, что Муаньо и Линделэфъ, въ своемъ прекрасномъ курсѣ варіаціоннаго исчисленія, замѣтили, что цѣпная линія не всегда можетъ быть построена черезъ двѣ данныя точки, и вывели *необходимое* условіе такой возможности. Выводъ сдѣланъ нѣсколько сбивчиво и это дало поводъ Тодгентеру [1]) утверждать, будто названные авторы рѣшили вопросъ только въ частномъ случаѣ равныхъ ординатъ; для неравныхъ же ординатъ крайнихъ то-

---

[1]) Todhunter. Researches in the Calculus of Variations 1871 p. p. 56, 58.

чекъ онъ вывелъ новое также *необходимое* условіе. Наше изслѣдованіе общаго случая обнаруживаетъ *необходимость* условія Муаньо; кромѣ того мы выводимъ *необходимое* и *достаточное* условіе, выражаемое неравенствомъ, содержащимъ корень уравненія четвертой степени: условіе Тодгентера при этомъ не играетъ никакой роли.

Въ упомянутомъ сочиненіи (art. 24 и 282) Тодгентеръ между прочимъ указываетъ интегралы, при изслѣдованіи maximum или minimum которыхъ условіе Якоби принимаетъ такую же простую геометрическую форму, какъ при рѣшеніи вопроса о наименьшей поверхности вращенія. Изслѣдуя приведенное дифференціальное уравненіе втораго порядка, мы обнаружили, что вообще для кривыхъ, ему удовлетворяющихъ, условіе Якоби принимаетъ ту же геометрическую форму. Это дало намъ поводъ заняться рѣшеніемъ общаго вопроса объ опредѣленіи дифференціальнаго уравненія втораго порядка, въ приложеніи къ которому условіе Якоби имѣетъ вышеупомянутую форму. Рѣшеніемъ этого вопроса заканчивается настоящее изслѣдованіе.

---

1. Означимъ черезъ x и y координаты относительно какой нибудь системы, черезъ p первую производную $\frac{dy}{dx}$ и черезъ q вторую производную $\frac{d^2y}{dx^2}$. Пусть будетъ

$$1)\qquad q = \varphi(x, y, p)$$

дифференціальное уравненіе семейства кривыхъ и пусть первые интегралы этого уравненія будутъ

$$2)\qquad \psi(x, y, p) = \alpha, \qquad \sigma(x, y, p) = \beta,$$

гдѣ α и β произвольныя постоянныя. Въ конечномъ видѣ уравненіе разсматриваемаго семейства получится чрезъ исключеніе p между уравненіями 2) и будетъ

$$3)\qquad F(x, y, \alpha, \beta) = o.$$

Наоборотъ, изъ этого уравненія при посредствѣ дифференцированія и исключенія могутъ быть получены уравненія 2) и 1).

Опредѣлимъ максимальныя и минимальныя свойства этого семейства кривыхъ, состоящія въ томъ, что нѣкоторые интегралы вида

$$4) \qquad \int_a^b f(x, y, p)\, dx$$

достигаютъ своихъ максимальныхъ или минимальныхъ значеній.

2. Извѣстно по общепринятой теоріи, что интегралъ 4) достигаетъ своего maximum или minimum, когда въ немъ y опредѣляется какъ функція x изъ уравненія

$$\frac{\partial f}{dy} - \frac{d}{dx}\,\frac{\partial f}{\partial p} = o,$$

или, въ раскрытомъ видѣ,

$$5) \qquad \frac{\partial f}{dy} - \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial p} - \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial p}\, p - \frac{\partial^2 f}{\partial p^2}\, q = o.$$

Слѣдовательно, для того чтобы интегралъ 4) достигалъ своего наибольшаго или наименьшаго значенія вдоль кривыхъ, опредѣляемыхъ уравненіемъ 1), необходимо, чтобы это уравненіе совпадало съ уравненіемъ 5), или, чтобы имѣло мѣсто равенство

$$6) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial p} - \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial p}\, p - \frac{\partial^2 f}{\partial p^2}\, \varphi(x, y, p) = o.$$

Намъ предстоитъ изъ этого уравненія опредѣлить видъ функціи $f(x, y, p)$.

3. Дифференцируя уравненіе 6) по p и полагая $\frac{\partial^2 f}{\partial p^2} = z$, получимъ уравненіе съ частными производными перваго порядка

$$7) \qquad \frac{\partial z}{\partial x} + p\,\frac{\partial z}{\partial y} + \varphi(x, y, p)\,\frac{\partial z}{\partial p} + \frac{\partial \varphi}{\partial p}\, z = o,$$

для интеграціи котораго, какъ извѣстно, необходимо интегрировать систему уравненій

$$8)\qquad \frac{dx}{1} = \frac{dy}{p} = \frac{dp}{\varphi(x,y,p)} = \frac{dz}{-\frac{\partial\varphi}{\partial p} z}.$$

Два интегральныя уравненія этой системы, очевидно, суть 2) третье же уравненіе можно представить въ различныхъ видахъ, изъ которыхъ достаточно остановиться на слѣдующемъ

$$9)\qquad z = \gamma \,.\, e^{-\int \frac{\partial \log\varphi}{\partial p} dp},$$

гдѣ γ произвольное постоянное и при выполненіи интеграціи въ показателѣ слѣдуетъ въ подъинтегральной функціи вставить выраженія x и y въ функціяхъ p изъ уравненій 2), или, вообще, при посредствѣ этихъ уравненій привести $\frac{\partial \log\varphi}{\partial p} dp$ къ виду полнаго дифференціала. Самое общее выраженіе z получится, когда замѣнимъ γ произвольною функціею $\phi(\alpha, \beta)$ и затѣмъ вмѣсто α и β вставимъ функціи $\psi(x, y, p)$ и $\sigma(x, y, p)$. Итакъ

$$10)\qquad z = \phi(\psi, \sigma)\, e^{-\int\left(\frac{\partial \log\varphi}{\partial p}\right) dp},$$

гдѣ заключеніемъ $\frac{\partial \log\varphi}{\partial p}$ въ скобки мы желаемъ указать подстановку ψ и σ вмѣсто α и β въ результатъ интеграціи.

4. Найдя z, нетрудно опредѣлить $f(x, y, p)$, ибо изъ уравненія

$$11)\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} = \phi(\psi, \sigma)\, e^{-\int\left(\frac{\partial \log\varphi}{\partial p}\right) dp}$$

получимъ чрезъ интеграцію по p

$$12)\qquad \frac{\partial f}{\partial p} = \int_A^p \phi(\psi, \sigma)\, e^{-\int\left(\frac{\partial \log\varphi}{\partial p}\right) dp} dp + B,$$

гдѣ A и B суть произвольныя функціи x и y, и отсюда чрезъ новую интеграцію найдемъ

$$13)\quad f(x,y,p)=\int_A^p dp\int_A^p \phi(\psi,\sigma)\, e^{-\int\left(\frac{\partial \log\varphi}{\partial p}\right)dp}dp+Bp+C,$$

или, приводя къ простымъ интеграламъ,

$$14)\quad f(x,y,p)=p\int_A^p \phi(\psi,\sigma)\, e^{-\int\left(\frac{\partial \log\varphi}{\partial p}\right)dp}dp$$

$$-\int_A^p p\,\phi(\psi,\sigma)\, e^{-\int\left(\frac{\partial \log\varphi}{\partial p}\right)dp}dp+Bp+C,$$

гдѣ C новая произвольная функція x и y.

Такимъ образомъ самое общее выраженіе $f(x,y,p)$ получается съ четырьмя произвольными функціями $\phi(\psi,\sigma)$, A, B, C изъ которыхъ три послѣднія зависятъ только отъ x и y.

Замѣтимъ, что произвольную функцію A, мы, не нарушая общности, можемъ замѣнить какою нибудь опредѣленною функціей или даже постоянной величиной; но и послѣ того общее выраженіе $f(x,y,p)$ будетъ содержать три произвольныя функціи, между тѣмъ какъ по существу вопроса, состоящаго въ интеграціи уравненія съ частными производными втораго порядка 6), мы можемъ ожидать въ самомъ общемъ выраженіи $f(x,y,p)$ не болѣе двухъ независимыхъ произвольныхъ функцій. Поэтому между разсматриваемыми произвольными функціями необходимо должна существовать нѣкоторая зависимость.

5. Чтобы открыть эту зависимость, вставимъ найденное выраженіе $f(x,y,p)$ въ уравн. 6). Дифференцированіе 14) доставляетъ

$$\frac{\partial f}{\partial y}=p\int_A^p \frac{\partial}{\partial y}\Big[\phi(\psi,\sigma)\, e^{-\int\left(\frac{\partial \log\varphi}{\partial p}\right)dp}\Big]dp$$

$$-\int_A^p p\,\frac{\partial}{\partial y}\Big[\phi(\psi,\sigma)\, e^{-\int\left(\frac{\partial \log\varphi}{\partial p}\right)dp}\Big]dp$$

$$+(A-p)\Big[\phi(\psi,\sigma)\, e^{-\int\left(\frac{\partial \log\varphi}{\partial p}\right)dp}\Big]_{p=A}\frac{\partial A}{\partial y}+\frac{\partial B}{\partial y}p+\frac{\partial C}{\partial y}.$$

Далѣе изъ формулы 12) получимъ

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial p} = \int_A^p \frac{\partial}{\partial x}\left[\Phi(\psi, \sigma)\, e^{-\int\left(\frac{\partial \log \varphi}{\partial p}\right) dp}\right] dp$$

$$-\left[\Phi(\psi, \sigma)\, e^{-\int\left(\frac{\partial \log \varphi}{\partial p}\right) dp}\right]_{p=A} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial p} = \int_A^p \frac{\partial}{\partial y}\left[\Phi(\psi, \sigma)\, e^{-\int\left(\frac{\partial \log \varphi}{\partial p}\right) dp}\right] dp$$

$$-\left[\Phi(\psi, \sigma)\, e^{-\int\left(\frac{\partial \log \varphi}{\partial p}\right) dp}\right]_{p=A} \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial B}{\partial y}.$$

Вставляя эти выраженія, равно какъ 11), въ уравненіе 6), замѣтимъ, что два интегральные члена съ множителями p, именно первый членъ $\frac{\partial f}{\partial y}$ и первый членъ $\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial p}$, сокращаются, далѣе, замѣняя членъ уравненія $\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}\, \varphi(x, y, p)$, равный

$$\varphi(x, y, p)\, \Phi(\psi, \sigma)\, e^{-\int\left(\frac{\partial \log \varphi}{\partial p}\right) dp},$$

чрезъ

$$\int_A^p \frac{\partial}{\partial p}\left[\varphi(x, y, p)\, \Phi(\psi, \sigma)\, e^{-\int\left(\frac{\partial \log \varphi}{\partial p}\right) dp}\right] dp$$

$$+\left[\varphi(x, y, p)\, \Phi(\psi, \sigma)\, e^{-\int\left(\frac{\partial \log \varphi}{\partial p}\right) dp}\right]_{p=A}$$

и соединяя всѣ интегральные члены подъ однимъ общимъ знакомъ интеграла, получимъ

$$-\int_A^p \left(\frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial y} + \varphi(x, y, p) \frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial \varphi}{\partial p}\right) \Phi(\psi, \sigma)\, e^{-\int\left(\frac{\partial \log \varphi}{\partial p}\right) dp}\, dp,$$

что обращается въ нуль на основаніи уравненія 7) и найденнаго нами рѣшенія этого уравненія 10).

Выполнивъ дальнѣйшія простыя приведенія, мы придемъ окончательно къ слѣдующему условному уравненію, которое должно быть выполнено для того, чтобы найденная нами функція $f(x, y, p)$ удовлетворяла уравненію 6).

$$15)\quad \left[\frac{\partial A}{\partial x}+A\frac{\partial A}{\partial y}-\varphi(x, y, A)\right]\left[\phi(\psi,\sigma)\,e^{-\int\left(\frac{\partial\log\varphi}{\partial p}\right)dp}\right]_{p=A}+\frac{\partial C}{\partial y}-\frac{\partial B}{\partial x}=o.$$

6. Вспомнимъ, что до сихъ поръ мы не сдѣлали опредѣленнаго выбора для функціи A. Очевидно, удобнѣе всего такъ избрать A, чтобы условіе 15) распалось на два, удовлетворяющіяся независимо одно отъ другаго, именно

$$16)\quad \left[\frac{\partial A}{\partial x}+A\frac{\partial A}{\partial y}-\varphi(x, y, A)\right]\left[\phi(\psi,\sigma)\,e^{-\int\left(\frac{\partial\log\varphi}{\partial p}\right)dp}\right]_{p=A}=o,$$

$$17)\quad \frac{\partial C}{\partial y}-\frac{\partial B}{\partial x}=o.$$

Изъ этихъ условій первое служитъ для опредѣленія A, а второе представляетъ связь между произвольными функціями B и C. Изъ этой связи слѣдуетъ, что биномъ $C\,dx+B\,dy$ долженъ быть точнымъ дифференціаломъ нѣкоторой функціи двухъ перемѣнныхъ, обозначая которую черезъ $f_1(x, y)$ будемъ имѣть

$$C=\frac{\partial f_1}{\partial x},\quad B=\frac{\partial f_1}{\partial y}.$$

Что же касается уравненія 16), опредѣляющаго A, то оно приводитъ къ одному изъ двухъ предположеній, именно или

$$18)\quad \frac{\partial A}{\partial x}+A\frac{\partial A}{\partial y}-\varphi(x, y, A)=o,$$

или

$$19)\quad \left[\phi(\psi,\sigma)\,e^{-\int\left(\frac{\partial\log\varphi}{\partial p}\right)dp}\right]_{p=A}=o.$$

Условіе 18) есть уравненіе съ частными производными перваго порядка, котораго рѣшеніе получается при посредствѣ интеграціи системы

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{A}=\frac{dA}{\varphi\,(x,\,y,\,A)}\,.$$

Интегральныя уравненія этой системы, очевидно, будутъ

$$\psi\,(x,\,y,\,A)=\alpha,\qquad \sigma\,(x,\,y,\,A)=\beta,$$

въ силу чего дифференціальное условіе 18) замѣнится конечнымъ

$$20)\qquad \Psi\,[\psi\,(x,\,y,\,A),\quad \sigma\,(x,\,y,\,A)]=o,$$

гдѣ Ψ есть символъ произвольной функціи: функція A должна быть корнемъ уравненія 20).

Условіе 19) будетъ удовлетворено, когда или $\phi\,(\psi,\,\sigma)=o$, если притомъ $\int\left(\frac{\partial \log\varphi}{\partial p}\right)dp$ конеченъ, что является частнымъ случаемъ уравненія 20), или $\int\left(\frac{\partial \log\varphi}{\partial p}\right)dp=\infty$, но притомъ $\phi\,(\psi,\,\sigma)$ остается конечна; это условіе можетъ доставить для A значеніе, неудовлетворяющее уравненію 20).

7. Послѣ этого окончательный результатъ нашего анализа можетъ быть представленъ въ слѣдующемъ видѣ:

Общее рѣшеніе уравненія 6) *выражается формулою*

$$21)\; f\,(x,\,y,\,p)=\int_A^p dp\int_A^p \phi\,(\psi,\,\sigma)\,e^{-\int\left(\frac{\partial \log\varphi}{\partial p}\right)dp}dp+\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial y}\,p,$$

или

$$22)\qquad f\,(x,\,y,\,p)=p\int_A^p \phi\,(\psi,\,\sigma)\,e^{-\int\left(\frac{\partial \log\varphi}{\partial p}\right)dp}\,dp$$

$$-\int_A^p p\,\phi\,(\psi,\,\sigma)\,e^{-\int\left(\frac{\partial \log\varphi}{\partial p}\right)dp}\,dp+\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial y}\,p,$$

гдѣ A *есть корень уравненія* 20) *или* 19).

Замѣтимъ, что присутствіе членовъ съ произвольною функціею $f_1(x, y)$ можно было легко предугадать, такъ какъ интегралъ $\int\limits_a^b \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\, p\right) dx$, очевидно, зависитъ только отъ конечныхъ значеній y, а не отъ вида функціи y, такъ что прибавленіе членовъ $\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\, p$ къ подъинтегральной функціи въ интегралѣ $\int\limits_a^b f(x, y, p)\, dx$ не окажетъ вліянія на опредѣленіе семейства кривыхъ, для которыхъ этотъ интегралъ достигаетъ своего maximum или minimum, а окажетъ вліяніе только на выборъ той или другой кривой этого семейства въ зависимости отъ предѣльныхъ условій. Въ силу этого при опредѣленіи функціи $f(x, y, p)$ по формуламъ 21) или 22), мы можемъ игнорировать какъ члены съ произвольною функціею $f_1(x, y)$, такъ и вообще члены, надъ которыми можно выполнить интеграцію въ неопредѣленномъ видѣ, т. е. не предполагая опредѣленной зависимости y отъ x.

8. Сдѣлаемъ наконецъ еще одно замѣчаніе общаго характера. Извѣстно, что Якобіевъ множитель уравненія

$$q - \varphi(x, y, p) = o$$

опредѣляется уравненіемъ

$$\frac{\partial M}{\partial x} + p\,\frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial M\varphi}{\partial p} = o,$$

которое тождественно съ 7). Отсюда слѣдуетъ, что

$$M = \phi(\psi, \beta)\, e^{-\int \left(\frac{\partial \log \varphi}{\partial p}\right) dp} = \frac{\partial^2 f}{\partial p^2},$$

и что слѣдовательно *по умноженіи на Якобіева множителя уравненіе* $q - \varphi(x, y, p) = o$ *приводится къ виду*

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p} = o.$$

9. Предположимъ теперь, что мы желаемъ опредѣлить максимальныя и минимальныя свойства нѣкоторой кривой, представляемой уравненіемъ

$$F(x, y) = o.$$

Можно безконечно разнообразными способами составить дифференціальное уравненіе втораго порядка, которому будетъ удовлетворять данная кривая какъ частное рѣшеніе. Но можно указать и нѣкоторые общіе пріемы для составленія дифференціальнаго уравненія.

Считая x и y прямоугольными координатами, будемъ именно разсматривать данную кривую какъ представительницу гомотетичныхъ кривыхъ, обще уравненіе которыхъ будетъ

$$F\left(\frac{x}{\beta}, \frac{y}{\beta}\right) = o,$$

гдѣ β произвольное постоянное. Дифференцируя двукратно это уравненіе и исключая β и x, мы получимъ дифференціальное уравненіе втораго порядка, которому будетъ удовлетворять данная кривая. Такъ какъ въ результатѣ x исключается, то ясно, что всѣ кривыя, заключённыя въ уравненіи

23) $$F\left(\frac{x-\alpha}{\beta}, \frac{y}{\beta}\right) = o,$$

гдѣ α новое произвольное постоянное, будутъ удовлетворять тому же дифференціальному уравненію, форму котораго нетрудно опредѣлить. Въ самомъ дѣлѣ, дифференцируя двукратно уравненіе 23) и полагая $\frac{x-\alpha}{\beta} = u$, $\frac{y}{\beta} = v$, будемъ имѣть

$$\frac{\partial F(u, v)}{\partial u} + \frac{\partial F(u, v)}{\partial v} p = o,$$

$$\frac{\partial^2 F(u, v)}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 F(u, v)}{\partial u\, \partial v} p + \frac{\partial^2 F(u, v)}{\partial v^2} p^2 + \frac{\partial F}{\partial v} \beta q = o,$$

откуда, замѣняя βq чрезъ $\frac{yq}{v}$ и исключая u, v, получимъ дифференціальное уравненіе вида

24) $$yq = \Theta(p).$$

Таково дифференціальное уравненіе подобныхъ кривыхъ, имѣющихъ центръ подобія въ произвольной точкѣ x.

10. По поводу этого уравненія необходимо сдѣлать слѣдующее важное замѣчаніе. Такъ какъ оно получено чрезъ исключеніе произвольнаго постояннаго β, то это послѣднее можетъ быть признаваемо какъ дѣйствительнымъ, такъ и мнимымъ. При дѣйствительномъ β уравненіе $F\left(\frac{x}{\beta}, \frac{y}{\beta}\right) = o$ представитъ семейство кривыхъ, гомотетичныхъ съ данною; но нерѣдко и при мнимомъ β тоже уравненіе представитъ дѣйствительныя кривыя, которыхъ дифференціальное уравненіе будетъ также 24), но которыя, конечно, не будутъ подобны данной. Легко видѣть, въ какомъ случаѣ уравненіе 24) будетъ соотвѣтствовать кривымъ двухъ различныхъ семействъ; это будетъ тогда, когда уравненіе данной кривой будетъ представлять дѣйствительную кривую и по замѣнѣ въ немъ x и y черезъ xi, yi. Но полагая, что данное уравненіе рѣшено относительно y и принимая

$$y = f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

получимъ, по замѣнѣ x и y черезъ xi, yi,

$$y = \frac{f(xi) + f(-xi)}{2i} + \frac{f(xi) - f(-xi)}{2i};$$

откуда видно, что для того чтобы y была дѣйствительною функціей x необходимо и достаточно, чтобы $f(x)$ была нечетная функція. Въ этомъ случаѣ 24) будетъ дифференціальнымъ уравненіемъ кривыхъ гомотетичныхъ съ кривыми

$$y = f(x)$$

и

$$y = \frac{f(xi) - f(-xi)}{2i} = -if(xi).$$

Предполагая, что $f(x)$ непрерывна при $x = o$ будемъ имѣть при $x = o$, $y = o$, а слѣдовательно $\Theta(p) = o$.

11. Наоборотъ, дифференціальное уравненіе 24) имѣетъ общій интегралъ вида 23), ибо, полагая въ 24) $q = \frac{dp}{dx} = p\frac{dp}{dy}$,

получимъ

$$\frac{p\,dp}{\Theta(p)}=\frac{dy}{y},$$

откуда, умножая на 2 и интегрируя, *) найдемъ

$$\log(y^2)=\int\frac{2p\,dp}{\Theta(p)}+\log(\beta^2),$$

откуда

$$25)\qquad y^2=\beta^2 e^{\int\frac{2p\,dp}{\Theta(p)}},\text{ или } y=\pm\beta\, e^{\int\frac{p\,dp}{\Theta(p)}};$$

затѣмъ будемъ имѣть

$$dx=\frac{dp}{q}=\frac{y\,dp}{\Theta(p)}=\pm\beta\, e^{\int\frac{p\,dp}{\Theta(p)}}\frac{dp}{\Theta(p)},$$

откуда

$$26)\qquad x-\alpha=\pm\beta\int e^{\int\frac{p\,dp}{\Theta(p)}}\frac{dp}{\Theta(p)}.$$

Исключеніе p изъ уравненій 25) и 26) доставитъ результатъ вида 23), ч. т. д.

12. Но здѣсь необходимо сдѣлать слѣдующее замѣчаніе. Если при нѣкоторомъ значеніи $p=k$ функція $\Theta(p)$ исчезаетъ, то, согласно n^0 10, можно заключить, что данному уравненію 24) будутъ удовлетворять двѣ системы различныхъ кривыхъ, имѣ-

---

*) Умноженіе на 2 имѣетъ цѣлью ввести въ интегралъ $\log y^2$ вмѣсто $\log y$ для того чтобы дать возможность разсматривать и отрицательныя значенія y при дѣйствительныхъ значеніяхъ произвольныхъ постоянныхъ. Соотвѣтственно этому ниже подъ $e^{\int\frac{p\,dp}{\Theta(p)}}$ понимается всегда положительная функція. Уравненіе $y=\beta\, e^{\int\frac{p\,dp}{\Theta(p)}}$ при дѣйствительномъ β, очевидно, не можетъ соотвѣтствовать всѣмъ точкамъ кривой, если она пересѣкаетъ ось абсциссъ.

ющихъ общія точки, въ которыхъ касательныя опредѣляются общимъ для обѣихъ системъ уравненіемъ $p = k$; конечныя уравненія обѣихъ системъ будутъ имѣть видъ 23). Но изъ двухъ этихъ системъ можно составить новыя системы, которыя всѣми своими элементами будутъ удовлетворять уравненію 24), но которыя не могутъ быть представлены *однимъ* уравненіемъ вида 23): для образованія таких системъ достаточно разсмотрѣть одновременно кривыя двухъ первыхъ системъ и считать соединенныя въ общихъ точкахъ вѣтви различныхъ кривыхъ за одну кривую. Уяснимъ это простымъ примѣромъ.

Разсмотримъ уравненіе

$$y\,q = p^2 - 1.$$

Согласно формулы 25) одинъ интегралъ его будетъ

$$y^2 = \beta^2\, e^{\int \frac{2p\,dp}{p^2 = 1}}.$$

Здѣсь при выполненіи интеграціи въ показателѣ слѣдуетъ различать два предположенія: $p^2 < 1$ и $p^2 > 1$.

Если принять $p^2 < 1$, то получимъ вогнутую къ оси x кривую, для которой будемъ имѣть

$$y^2 = \beta^2 (1 - p^2), \text{ или } y = \pm \beta \sqrt{1 - p^2}\,,$$

$$\pm (x - \alpha) = -\beta \int \frac{dp}{\sqrt{1 - p^2}} = \beta \operatorname{arc} \cos p,$$

такъ что окончательно

$$y = \pm \beta \sin \frac{x - \alpha}{\beta}.$$

При $p^2 > 1$ получимъ выпуклую къ оси x кривую, для которой

$$y^2 = \beta^2 (p^2 - 1), \text{ или } y = \pm \beta \sqrt{p^2 - 1}\,,$$

$$\pm (x - \alpha) = \beta \int \frac{dp}{\sqrt{p^2 - 1}} = \beta \log (p + \sqrt{p^2 - 1}).$$

откуда

$$y = +\frac{\beta}{2}\left(e^{\frac{x-\alpha}{\beta}} - e^{-\frac{x-\alpha}{\beta}}\right).$$

При $x = \alpha$, причемъ $y = o$, кривыя обѣихъ системъ имѣютъ точку перегиба, для которой $p = +1$.

Составимъ теперь непрерывную кривую параболическаго вида изъ слѣдующихъ трехъ частей

I) $x \leqq \alpha$, $$y = \frac{\beta}{2}\left(e^{\frac{x-\alpha}{\beta}} - e^{-\frac{x-\alpha}{\beta}}\right),$$

II) $\alpha \leqq x \leqq \alpha + \pi\beta$, $$y = \beta \sin\frac{x-\alpha}{\beta},$$

III) $x \geqq \alpha + \pi\beta$, $$y = \frac{\beta}{2}\left(e^{-\frac{x-\alpha}{\beta}+\pi} - e^{\frac{x-\alpha}{\beta}-\pi}\right).$$

Каждый изъ трехъ отрѣзковъ удовлетворяетъ уравненію 24), а въ точкахъ соединенія ихъ при $x = \alpha$ и $x = \alpha + \pi\beta$, не только ординаты, но первыя и вторыя производныя ординатъ равны между собою. Первый отрѣзокъ можно замѣнить прямою $y = x - \alpha$, равно какъ третій прямою $y = -x + \alpha + \pi\beta$. Выборъ отрѣзковъ сдѣланъ нами такъ, что y остается однозначною функціей x: если оставить безъ вниманія это условіе, то можно составить и другія непрерывныя кривыя, удовлетворяющія всѣми своими элементами уравненію 24), но непредставляющіяся однимъ конечнымъ уравненіемъ.

Эти замѣчанія относительно многозначности въ нѣкоторыхъ случаяхъ общаго интеграла дифференціальнаго уравненія 24) имѣютъ значительный интересъ для теоріи дифференціальныхъ уравненій, для варіаціоннаго исчисленія, въ которомъ кривыя опредѣляются дифференціальными уравненіями, причемъ часто приходится имѣть дѣло именно съ уравненіемъ вида 24), наконецъ для рѣшенія занимающаго насъ вопроса объ опредѣленіи максимальныхъ и минимальныхъ свойствъ кривыхъ линій. Замѣняя конечное уравненіе данной кривой ея дифференціальнымъ уравненіемъ вида 24), мы должны точно опредѣлить условія, при которыхъ это уравненіе соотвѣтствуетъ именно данной кривой.

13. Разсмотрѣніе общихъ выраженій координатъ x и y приводитъ ко введенію вмѣсто p новаго перемѣннаго $\omega = \int \frac{dp}{\Theta(p)}$.

Если обозначимъ интегралъ

$$\int e^{\int \frac{p\,dp}{\Theta(p)}} \frac{dp}{\Theta(p)} = \int e^{\int p\,d\omega}\,d\omega$$

черезъ $\Sigma(\omega)$, то легко найдемъ

$$p = \frac{\Sigma''(\omega)}{\Sigma'(\omega)}, \qquad x = \pm \beta\Sigma(\omega) + \alpha, \qquad y = \pm \beta\,\Sigma'(\omega),$$

$$\frac{dx}{d\omega} = y.$$

Послѣднее соотношеніе обнаруживаетъ геометрическое значеніе перемѣннаго параметра ω въ принятомъ нами предположеніи, что x и y представляютъ прямоугольныя координаты: оно показываетъ именно, что разсматриваемая кривая представляется какъ рулетта, полоидою которой служитъ ось x, и ω есть уголъ, описываемый какою нибудь прямою, неизмѣняемо соединенною съ серполоидою. Уравненіе этой послѣдней относительно неизмѣняемо соединенныхъ съ нею осей, имѣющихъ началомъ точку, описывающую рулетту, получится, какъ извѣстно, чрезъ исключеніе ω изъ уравненій

$$\xi = \frac{dx}{d\omega}\sin\omega + \frac{dy}{d\omega}\cos\omega,$$

$$\eta = -\frac{dx}{d\omega}\cos\omega + \frac{dy}{d\omega}\sin\omega.$$

14. Первые интегралы уравненія 24) суть

$$\sigma(x, y, p) = y e^{-\int \frac{p\,dp}{\Theta(p)}} = \pm \beta.$$

$$\psi(x, y, p) = x - y e^{-\int \frac{p\,dp}{\Theta(p)}} \int e^{\int \frac{p\,dp}{\Theta(p)}} \frac{dp}{\Theta(p)} = \alpha.$$

Функція $\varphi(x, y, p)$ въ настоящемъ случаѣ есть $\frac{1}{y}\Theta(p)$, какъ видно изъ уравненія 24): а потому

$$\int \left(\frac{\partial \log \varphi}{\partial p}\right) dp = \log \Theta(p)$$

и мы будемъ имѣть

$$f(x, y, p) = \int_A^p dp \int_A^p \phi(\psi, \sigma) \frac{dp}{\Theta(p)}.$$

Полагая $\phi(\psi, \sigma) = \sigma^n$, получимъ

$$f(x, y, p) = y^n \int_A^p dp \int_A^p e^{-n \int \frac{p\,dp}{\Theta(p)}} \frac{dp}{\Theta(p)},$$

гдѣ A можемъ опредѣлить, напримѣръ, уравненіемъ

$$y e^{-\int \frac{A\,dA}{\Theta(A)}} = \text{пост. } C,$$

которое доставитъ A въ функціи y. Если обозначимъ черезъ $\chi''(p)$ функцію $e^{-n\int \frac{p\,dp}{\Theta(p)}} \frac{1}{\Theta(p)}$, то получимъ

$$f(x, y, p) = y^n \,[\chi(p) - \chi(A) - \chi'(A)\,p + \chi'(A)\,A].$$

гдѣ членъ $y^n \chi'(A) \cdot p$ можетъ быть откинутъ, какъ интегрирующійся при неопредѣленномъ y, а пара членовъ $y^n [A \chi'(A) - \chi(A)]$ приводится къ виду $y^n \int A \chi''(A)\, dA$, т. е.

$$y^n \int e^{-n \int \frac{A\,dA}{\Theta(A)}} \frac{A\,dA}{\Theta A} = -\frac{1}{n}\left[y e^{-\int \frac{A\,dA}{\Theta(A)}}\right]^n = -\frac{1}{n} C^n$$

и также можетъ быть откинута, вслѣдствіе чего $f(x, y, p)$ приведется къ одному члену $y^n \chi(p)$.

Итакъ *для каждой кривой существуетъ интегралъ вида*

$$\int_{x_0}^{x_1} y^n \chi(p)\, dx,$$

достигающій на ней своего наибольшаго или наименьшаго значенія.

Наоборотъ при данной функціи $\chi(p)$ легко найдемъ

$$\Theta(p) = \frac{c - n \int p \chi''(p)\, dp}{\chi''(p)}.$$

Такъ при $\chi(p) = \sqrt{1 + p^2}$ будемъ имѣть

$$\Theta(p) = c(1 + p^2)^{\frac{3}{2}} + n(1 + p^2) \text{ и т. д.}$$

15. Обращаясь къ разсмотрѣнію условій, необходимыхъ для существованія maximum или minimum, мы должны прежде всего принять, согласно съ Лежандромъ, что

$$\frac{\partial^2 f}{\partial p2} = \frac{\phi(\psi, \sigma)}{\Theta(p)} = \frac{\phi(\alpha, \pm\beta)}{\Theta(p)}$$

сохраняетъ постоянный знакъ между предѣлами интеграціи: отсюда слѣдуетъ, что должна сохранять постоянный знакъ и функція $\Theta(p)$.

При прямоугольныхъ координатахъ x и y это будетъ означать, на основаніи уравненія 24), что вдоль всего разсматриваемаго отрѣзка кривая будетъ или только выпукла или только вогнута къ оси x.

16. Далѣе, по теоремѣ Якоби, должны существовать такіе постоянные множители m и n, чтобы выраженіе

$$-m\frac{\partial y}{\partial \alpha}+n\frac{\partial y}{\partial \beta}$$

не обращалось въ нуль между предѣлами интеграціи и при обоихъ предѣлахъ. Обращаясь къ уравненіямъ 25) и 26) и считая въ нихъ x постояннымъ, получимъ изъ перваго уравненія чрезъ дифференцированіе его по α и β

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha}=\pm\beta e^{\int\frac{p\,dp}{\Theta(p)}}\frac{p}{\Theta(p)}\frac{\partial p}{\partial \alpha},$$

$$\frac{\partial y}{\partial \beta}=\pm e^{\int\frac{p\,dp}{\Theta(p)}}\left\{1+\beta\frac{p}{\Theta(p)}\frac{\partial p}{\partial \beta}\right\},$$

и изъ втораго подобнымъ же образомъ

$$-1=\pm\beta e^{\int\frac{p\,dp}{\Theta(p)}}\frac{1}{\Theta(p)}\frac{\partial p}{\partial \alpha},$$

$$o=\int e^{\int\frac{p\,dp}{\Theta(p)}}\frac{dp}{\Theta(p)}+\beta e^{\int\frac{p\,dp}{\Theta(p)}}\frac{1}{\Theta(p)}\frac{\partial p}{\partial \beta}.$$

Отсюда найдемъ

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha}=-p,$$

$$\frac{\partial y}{\partial \beta}=\pm\left[e^{\int\frac{p\,dp}{\Theta(p)}}-p\int e^{\int\frac{p\,dp}{\Theta(p)}}\frac{dp}{\Theta(p)}\right],$$

или, чрезъ интеграцію по частямъ, когда она позволительна,

$$\frac{\partial y}{\partial \beta}=+p\int e^{\int\frac{p\,dp}{\Theta(p)}}d\frac{1}{p}.$$

Итакъ, выраженіе

$$-m\frac{\partial y}{\partial\alpha}+n\frac{\partial y}{\partial\beta}=p\left(m\pm n\int e^{\int\frac{p\,dp}{\Theta\,(p)}}d\,\frac{1}{p}\right)$$

не должно обращаться въ нуль между предѣлами интеграціи, равно какъ при обоихъ предѣлахъ.

16. Легко дать геометрическое истолкованіе условію Якоби въ предположеніи, что x и y представляютъ прямолинейныя координаты.

Въ самомъ дѣлѣ первое выраженіе $\frac{\partial y}{\partial\beta}$ можетъ быть приведено къ виду

$$\frac{\partial y}{\partial\beta}=\frac{y}{\beta}-p\frac{x-\alpha}{\beta}=-\frac{p}{\beta}\left[x-\frac{y}{p}-\alpha\right]$$

и слѣдовательно

$$-m\frac{\partial y}{\partial\alpha}+n\frac{\partial y}{\partial\beta}=\frac{p}{\beta}\left[m\beta+n\alpha-n\left(x-\frac{y}{p}\right)\right].$$

Замѣтивъ теперь, что $x-\frac{y}{p}$ представляетъ абсциссу точки пересѣченія касательной къ кривой съ осью x, мы заключимъ, что Якобіеву условію можетъ удовлетворять только такой отрѣзокъ кривой, къ которому нельзя провести касательной черезъ *каждую* точку оси абсциссъ. Въ случаѣ, когда разсматривается отрѣзокъ кривой, несодержащій особыхъ точекъ и вогнутый къ оси x, это условіе будетъ, очевидно, удовлетворено: въ случаѣ подобнаго же выпуклаго отрѣзка необходимо и достаточно, чтобы точка пересѣченія касательныхъ, проведенныхъ къ крайнимъ точкамъ его, находилась между кривою и осью обсциссъ: въ этомъ случаѣ, какъ и въ случаѣ вогнутаго отрѣзка, нельзя провести касательныхъ изъ точекъ отрѣзка оси абсциссъ, отсѣченнаго крайними касательными.

17. Мы займемся теперь вопросомъ объ опредѣленіи произвольныхъ постоянныхъ α и β въ предположеніи, что даны край-

нія точки, черезъ которыя должна проходить кривая. Если назовемъ черезъ x_0, y_0 и x_1, y_1 координаты конечныхъ точекъ и предположимъ, что извѣстно въ конечномъ видѣ уравненіе $F\left(\frac{x-\alpha}{\beta}, \frac{y}{\beta}\right) = o$, то поставленный вопросъ приведется къ нахожденію дѣйствительныхъ значеній для α и β изъ двухъ уравненій

$$F\left(\frac{x_0-\alpha}{\beta}, \frac{y_0}{\beta}\right) = o, \quad F\left(\frac{x_1-\alpha}{\beta}, \frac{y_1}{\beta}\right) = o.$$

Предполагая, что написанныя уравненія имѣютъ дѣйствительныя рѣшенія и найдя таковыя, намъ придется обратиться къ разсмотрѣнію условій maximum и minimum, т. е. въ сущности къ уравненію 24). Поэтому мы и займемся опредѣленіемъ постоянныхъ α и β въ предположеніи, что разсматриваются кривыя, опредѣляемыя дифференціальнымъ уравненіемъ 24), какъ это имѣетъ мѣсто въ варіаціонномъ исчисленіи.

Если назовемъ p_0 и p_1 неизвѣстныя значенія $p = \frac{dy}{dx}$ въ данныхъ конечныхъ точкахъ, то нашъ вопросъ приведется къ опредѣленію дѣйствительныхъ значеній α, β, p_0 и p_1 изъ четырехъ уравненій

$$27) \left\{ \begin{aligned} x_0 - \alpha &= \pm \beta \int^{p_0} e^{\int \frac{p\,dp}{\Theta(p)}} \frac{dp}{\Theta(p)}, \quad y_0 = \pm \beta e^{\int^{p_0} \frac{p\,dp}{\Theta(p)}}; \\ x_1 - \alpha &= \pm \beta \int^{p_1} e^{\int \frac{p\,dp}{\Theta(p)}} \frac{dp}{\Theta(p)}, \quad y_1 = \pm \beta e^{\int^{p_1} \frac{p\,dp}{\Theta(p)}}. \end{aligned} \right.$$

Достаточно одного взгляда на эти уравненія, чтобы замѣтить, что рѣшеніе ихъ въ указанномъ смыслѣ не всегда можетъ имѣть мѣсто. Ясно, напримѣръ, что если крайнія точки лежатъ по разныя стороны оси абсциссъ, равно какъ и въ случаѣ, когда одна или обѣ точки лежатъ на самой оси, необходимо, чтобы при нѣкоторомъ значеніи p интегралъ $\int \frac{p\,dp}{\Theta(p)}$ могъ обращаться въ $-\infty$; а это, конечно, налагаетъ нѣкоторыя условія на функцію $\Theta(p)$.

Мы примемъ, что $y_1 \geqq y_0 > o$. Въ этомъ случаѣ въ формулахъ 27) можно сохранить одинъ положительный знакъ при β.

18. Допустимъ, что интегралъ $\int \frac{p\,dp}{\Theta(p)}$, при какомъ нибудь опредѣленномъ значеніи соединеннаго съ нимъ произвольнаго постояннаго, представляетъ функцію, дѣйствительныя значенія которой заключаются между наинизшимъ P и наивысшимъ Q. Въ такомъ случаѣ мы должны имѣть

$$y_0\, e^{-Q} < \beta < y_0\, e^{-P}, \qquad y_1\, e^{-Q} < \beta < y_1\, e^{-P};$$

но совмѣстное существованіе подобныхъ неравенствъ, очевидно, возможно только если $y_1 e^{-Q} < y_0 e^{-P}$ и $y_0 e^{-Q} < y_1 e^{-P}$, откуда

$$28) \qquad e^{P-Q} < \frac{y_1}{y_0} < e^{Q-P};$$

при этомъ предыдущія неравенства приведутся къ слѣдующему

$$29) \qquad y_1\, e^{-Q} < \beta < y_0\, e^{-P}.$$

Понятно, что если существуетъ конечный minimum или maximum интеграла $\int \frac{p\,dp}{\Theta(p)}$, то при надлежащемъ выборѣ нижняго предѣла этотъ minimum или maximum можетъ быть приведенъ къ нулю.

Въ случаѣ, когда $y_1 = y_0$, условіе 28) отпадаетъ.

19. Другое условіе можно получить, разсматривая функцію

$$30) \qquad \frac{x-\alpha}{y} = e^{-\int \frac{p\,dp}{\Theta(p)}} \int e^{\int \frac{p\,dp}{\Theta(p)}} \frac{dp}{\Theta(p)}.$$

Допустимъ, что вторая часть способна измѣняться только между двумя крайними значеніями: наинизшимъ N и наивысшимъ M. Въ этомъ случаѣ мы должны принять

$$N < \frac{x_0 - a}{y_0} < M, \quad N < \frac{x_1 - a}{y_1} < M,$$

откуда

$$x_0 - N y_0 > a > x_0 - M y_0,$$

$$x_1 - N y_1 > a > x_1 - M y_1.$$

Но подобныя неравенства, очевидно, могутъ существовать совмѣстно только при условіяхъ

$$x_0 - N y_0 > x_1 - M y_1, \quad x_1 - N y_1 > x_0 - M y_0,$$

или

31) $$M y_1 - N y_0 > x_1 - x_0 > N y_1 - M y_0.$$

Этому неравенству, равно какъ 28), должны удовлетворять координаты данныхъ точекъ, для того чтобы поставленный вопросъ могъ имѣть рѣшеніе.

20. Неравенства 31), или, точнѣе, предшествующія имъ могутъ быть весьма просто интерпретированы геометрически. Пусть $N = \cot \varphi_0$, $M = \cot \varphi_1$, такъ что

$$x_0 - y_0 \cot \varphi_0 > x_1 - y_1 \cot \varphi_1,$$

$$x_1 - y_1 \cot \varphi_0 > x_0 - y_0 \cot \varphi_1.$$

Замѣтимъ теперь, что $x - y \cot \varphi$ представляетъ абсциссу точки пересѣченія съ осью x прямой, проведенной черезъ точку (x, y) и составляющей уголъ φ съ положительною осью x. На основаніи этого первое изъ написанныхъ неравенствъ означаетъ, какъ легко убѣдиться на простомъ чертежѣ, что прямая, проведенная подъ угломъ φ_0 черезъ точку (x_0, y_0), пересѣкается выше оси x съ прямою, проведенною подъ угломъ φ_1 черезъ точку (x_1, y_1); подобное же значеніе имѣетъ и второе неравенство. Два эти условія можно замѣнить однимъ слѣдующимъ: если черезъ данную точку, имѣющую меньшую абсциссу, проведемъ прямую, составляющую уголъ φ_0 съ положительной осью x, и черезъ точку ея пересѣченія съ осью x проведемъ другую прямую, составляющую уголъ φ_1 съ осью x, то вторая данная точка должна лежать въ верхнемъ углѣ, составляемомъ построенными прямыми.

21. Что касается постоянныхъ P и Q, представляющихъ наинизшее и наивысшее значенія интеграла $\int \frac{p\,dp}{\Theta(p)}$, то опредѣленіе ихъ приводится къ отысканію дѣйствительныхъ корней и мѣстъ разрыва функціи $\frac{p}{\Theta(p)}$. Замѣтимъ, что если $\Theta(o)$ имѣетъ конечное значеніе, отличное отъ нуля, то разсматриваемый интегралъ будетъ достигать maximum или minimum при $p=o$, смотря по тому, будетъ ли значеніе $\Theta(o)$ отрицательно или положительно.

Для опредѣленія постоянныхъ M и N нужно разсмотрѣть первую производную функціи 30).

Обозначая функцію 30) символомъ $\lambda(p)$, будемъ имѣть

$$\int e^{\int \frac{p\,dp}{\Theta(p)}} \frac{dp}{\Theta(p)} = \lambda(p)\,.\,e^{\int \frac{p\,dp}{\Theta(p)}},$$

откуда чрезъ дифференцированіе найдемъ

$$\frac{1}{\Theta(p)} = \lambda'(p) + \frac{p\,\lambda(p)}{\Theta(p)},$$

такъ что

32) $$\lambda'(p) = \frac{1-p\,\lambda(p)}{\Theta(p)}.$$

или

33) $$\Theta(p) = \frac{1-p\,\lambda(p)}{\lambda'(p)}.$$

Разсмотрѣніе этихъ уравненій приводитъ къ слѣдующимъ заключеніямъ относительно исчезанія и разрыва $\lambda'(p)$:

a) $\lambda'(p) = o$,

1°) если $1-p\lambda(p)=o$, но $\Theta(p)$ не $=o$; опредѣляя соотвѣтствующее значеніе $\Theta(p)$ по уравненію 33), получимъ

$\Theta(p) = -\dfrac{1}{p\lambda''(p)}$ или $\lambda''(p) = -\dfrac{1}{p\,\Theta(p)}$. Отсюда слѣдуетъ, что если p' есть корень уравненія $1 - p\lambda(p) = o$ и $\Theta(p')$ представляетъ конечную, отличную отъ нуля, величину, то $\lambda(p') = \dfrac{1}{p'}$ будетъ maximum или minimum функціи $\lambda(p)$, смотря по тому, будетъ ли число $p'\Theta(p')$ положительное или отрицательное.

2°) если $\Theta(p)$ обращается въ безконечность, но $1 - p\lambda(p)$ остается конечна.

3°), если $1 - p\lambda(p) = o$ и $\Theta(p) = o$: въ этомъ случаѣ вторая часть уравненія 32) принимаетъ видъ $\dfrac{o}{o}$ и, по извѣстному правилу, будетъ равна $-\dfrac{p\lambda'(p) + \lambda(p)}{\Theta'(p)}$, т. е. $-\dfrac{1}{p\,\Theta'(p)}$; но она должна представлять исчезающее значеніе $\lambda'(p)$, а потому должно быть $\Theta'(p) = \infty$; при этомъ, согласно 1°), и $\lambda''(p) = \infty$. Безконечнаго значенія въ разсматриваемомъ случаѣ p имѣть не можетъ, такъ какъ мы должны имѣть одновременно $\Theta(p) = o$ и $\Theta'(p) = \infty$, что возможно только при конечныхъ p.

4°) если $1 - p\lambda(p) = \infty$ и $\Theta(p) = \infty$; при конечномъ значеніи p равенства $\lambda(p) = \infty$ и $\lambda'(p) = o$ несовмѣстимы; при $p = \infty$ порядокъ безконечности $\Theta(p)$ долженъ быть выше $p\lambda(p)$.

b) $\lambda'(p) = \infty$,

5°) если $\Theta(p) = o$, но $1 - p\lambda(p)$ отлична отъ нуля: въ частномъ случаѣ $1 - p\lambda(p)$ можетъ быть безконечна; этотъ случай можетъ имѣть мѣсто только при конечныхъ значеніяхъ p, для того чтобы отношеніе 33) могло быть равно нулю.

6°) если $\Theta(p) = o$ и $1 - p\lambda(p) = o$; въ этомъ случаѣ порядокъ малости $\Theta(p)$ долженъ быть выше нежели $1 - p\lambda(p)$.

7°) если $\Theta(p) = \infty$ и $1 - p\lambda(p) = \infty$; какъ видно изъ 33) этотъ случай можетъ имѣть мѣсто только при $p = \infty$.

Примѣчаніе. Случай, когда $1 - p\lambda(p) = \infty$, а $\Theta(p)$ конечна и отлична отъ нуля, не можетъ имѣть мѣста, ибо $p\lambda(p)$ и $\lambda'(p)$ не могутъ быть безконечностями одного порядка.

На основаніи этихъ результатовъ опредѣленіе максимальныхъ и минимальныхъ значеній M и N функціи $\lambda(p)$ приводится къ разсмотрѣнію дѣйствительныхъ корней и мѣстъ разрыва функцій $1 - p\lambda(p)$ и $\Theta(p)$.

22. Связь, существующая между функціями $\Theta(p)$ и $\lambda(p)$ и выражаемая уравненіями 32) или 33), позволяетъ опредѣлять одну изъ нихъ по другой, [1]) равно какъ дѣлать заключенія о свойствахъ одной функціи по даннымъ свойствамъ другой. Положимъ, напримѣръ, что $\lambda'(p)$ не имѣетъ дѣйствительныхъ корней и мѣстъ разрыва и остается всегда положительна. Отсюда слѣдуетъ, что $\lambda(p)$ представляетъ возрастающую отъ $-\infty$ до $+\infty$ функцію и условіе 31) отпадаетъ.

Такъ какъ функція $1 - p\lambda(p)$, обращаясь въ $-\infty$ при $p = -\infty$, постоянно возрастаетъ до 1 при $p = o$ и затѣмъ постоянно убываетъ до $-\infty$ при $p = o$, то мы заключимъ, что разсматриваемая функція несомнѣнно имѣетъ два и только два дѣйствительные корня: одинъ отрицательный и одинъ положительный. Пусть эти корни будутъ $-r$ и s. Въ силу уравненія 32) и сдѣланнаго относительно $\lambda'(p)$ предположенія мы должны принять, что тѣ же корни имѣетъ и $\Theta(p)$. Вычисляя по извѣстному правилу вторую часть уравненія 32), будемъ имѣть

$$\lambda'(s) = -\frac{s\lambda'(s) + \lambda(s)}{\Theta(s)} = -\frac{s^2\lambda'(s) + 1}{s\Theta'(s)},$$

и такъ какъ здѣсь числитель несомнѣнно положителенъ вмѣстѣ съ $\lambda'(s)$, то мы должны принять $\Theta'(s) < o$. Точно также легко найти, что $\Theta'(-r) > o$. Въ силу этого мы можемъ утверждать,

---

[1]) Для функціи $\lambda(p)$, очевидно, невозможно только значеніе $\frac{1}{p}$.

что s и $-r$ будутъ простыми корнями $\Theta(p)$, такъ что

$$\Theta(p) = (p+r)(s-p)\,\Theta_1(p),$$

гдѣ $\Theta_1(p)$ не имѣетъ дѣйствителныхъ корней и мѣстъ разрыва и остается всегда положительна.

23. Предполагая, что условія 28) и 31) удовлетворяются координатами данныхъ точекъ, мы перейдемъ теперь къ рѣшенію уравненій 27). Исключивъ α, мы приведемъ эти уравненія къ виду

34)
$$\frac{x_1 - x_0}{\beta} - \int_{p_0}^{p_1} e^{\int \frac{p\,dp}{\Theta(p)}} \frac{dp}{\Theta(p)} = o,$$

$$\frac{y_0}{\beta} = e^{\int^{p_0} \frac{p\,dp}{\Theta(p)}}, \qquad \frac{y_1}{\beta} = e^{\int^{p_1} \frac{p\,dp}{\Theta(p)}}.$$

Если функцію $e^{\int \frac{p\,dp}{\Theta(p)}}$ обозначимъ для краткости символомъ $\psi(p)$, а обратную функцію назовемъ $\phi(p)$, то, замѣчая, что интегралъ, входящій въ первое уравненіе, можетъ быть представленъ въ видѣ $\int_{p_0}^{p_1} \frac{1}{p}\, d e^{\int \frac{p\,dp}{\Theta(p)}}$ и вводя въ него вмѣсто p перемѣнное $\frac{y}{\beta} = e^{\int \frac{p\,dp}{\Theta(p)}}$, получимъ на основаніи двухъ другихъ уравненій

35)
$$x_1 - x_0 - \int_{y_0}^{y_1} \frac{dy}{\phi\left(\frac{y}{\beta}\right)} = o.$$

Этотъ результатъ, содержащій одно произвольное постоянное β, очевидно, можетъ быть полученъ прямо изъ конечнаго уравненія кривой, рѣшеннаго относительно x, и намъ нужно будетъ найти удовлетворяющія ему дѣйствительныя значенія β, заключенныя между указанными неравенствомъ 29) предѣлами. Но въ силу замѣчаній n^0 12, а также того обстоятельства, что найдя корни уравненія 35), намъ придется всетаки обращаться къ уравненіямъ 34) для вычисленія p_0 и p_1, полезно непосредственно изслѣдовать эти послѣднія уравненія, не приводя ихъ къ 35).

24. Съ этою цѣлію будемъ разсматривать первую часть перваго уравненія 34) какъ функціи $\frac{1}{\beta}$, представляя ее въ видѣ

36) $$\frac{x_1 - x_0}{\beta} - \int_\mu^\nu \psi(p)\frac{dp}{\Theta(p)}$$

и предполагая, что μ и ν опредѣляются какъ функціи $\frac{1}{\beta}$ уравненіями

37) $$\frac{y_1}{\beta} = \psi(\mu), \quad \frac{y_1}{\beta} = \psi(\nu).$$

Здѣсь μ и ν опредѣляются какъ обратныя и потому вообще многозначныя функціи, такъ что, собственно говоря, намъ необходимо изслѣдовать функцію 36) при всѣхъ возможныхъ комбинаціяхъ значеній μ и ν; но иногда эта многозначность можетъ быть понижена изъ того соображенія, что при нѣкоторыхъ системахъ значеній μ и ν функція 36) очевидно будетъ сохранять постоянный знакъ и намъ придется такимъ образомъ изслѣдовать функцію 36) только при ограниченномъ числѣ значеній μ и ν.

Первая производная функціи 36) по перемѣнному $\frac{1}{\beta}$ будетъ

$$x_1 - x_0 - \frac{\psi(\nu)}{\Theta(\nu)}\frac{\partial\nu}{\partial\frac{1}{\beta}} + \frac{\psi(\mu)}{\Theta(\mu)}\frac{\partial\mu}{\partial\frac{1}{\beta}};$$

но дифференцированіе уравненій 37) доставитъ

a) $$\left\{\begin{aligned} y_0 &= \psi'(\mu)\frac{\partial\mu}{\partial\frac{1}{\beta}} = \frac{\psi(\mu)}{\Theta(\mu)}\mu\frac{\partial\mu}{\partial\frac{1}{\beta}}, \\ y_1 &= \psi'(\nu)\frac{\partial\nu}{\partial\frac{1}{\beta}} = \frac{\psi(\nu)}{\Theta(\nu)}\nu\frac{\partial\nu}{\partial\frac{1}{\beta}}. \end{aligned}\right.$$

вслѣдствіе чего разсматриваемая производная приметъ видъ

$$38)\qquad x_1-\frac{y_1}{\nu}-\left(x_0-\frac{y_0}{\mu}\right).$$

25. Для опредѣленія maxima и minima функціи 36) примемъ, что производная ея 38) обращается въ нуль, т. е. что

$$39)\qquad x_1-\frac{y_1}{\nu}=x_0-\frac{y_0}{\mu}.$$

Это уравненіе, въ соединеніи съ 37), послужитъ для опредѣленія значеній β, μ и ν, при которыхъ функція 36) достигаетъ своего maximum или minimum. Называя неизвѣстную общую величину обѣихъ частей уравненія 39) черезъ ξ, будемъ имѣть

$$40)\qquad \mu=\frac{y_0}{x_0-\xi}, \qquad \nu=\frac{y_1}{x_1-\xi};$$

затѣмъ уравненія 37) превратятся въ слѣдующія

$$41)\qquad \frac{1}{\beta}=\frac{1}{y_0}\,\psi\left(\frac{y_0}{x_0-\xi}\right)=\frac{1}{y_1}\,\psi\left(\frac{y_1}{x_1-\xi}\right).$$

Опредѣливъ всѣ дѣйствительные корни ξ этого уравненія, которые доставляютъ для β значенія, удовлетворяющія неравенству 29), а для μ и ν значенія, сообразныя съ наложенными на эти вѣтви многозначныхъ функцій ограниченіями, мы легко найдемъ соотвѣтствующія названнымъ корнямъ значенія β, μ, ν и функціи 36). Понятно, что для насъ имѣютъ интересъ только тѣ корни уравненія 41), которые соотвѣтствуютъ дѣйствительнымъ maxima и minima функціи 36) и слѣдовательно не обращаютъ въ нуль ея второй производной, которая будетъ

$$\frac{y_1}{\nu^2}\,\frac{\partial\nu}{\partial\frac{1}{\beta}}-\frac{y_0}{\mu^2}\,\frac{\partial\mu}{\partial\frac{1}{\beta}}\quad\text{или}\quad\frac{y_1^2}{\nu^2}\,\frac{1}{\psi'(\nu)}-\frac{y_0^2}{\mu^2}\,\frac{1}{\psi'(\mu)}.$$

Но легко видѣть, что двойной корень уравненія 41) этому условію не удовлетворяетъ, ибо онъ будетъ корнемъ и производнаго уравненія

$$\frac{1}{(x_0-\xi)^2}\,\psi'\left(\frac{y_0}{x-\xi}\right)=\frac{1}{(x_1-\xi)^2}\,\psi'\left(\frac{y_1}{x_1-\xi}\right)$$

или

$$\frac{\mu^2}{y_0{}^2}\,\psi'(\mu)=\frac{\nu^2}{y_1{}^2}\,\psi'(\nu)\,,$$

такъ что вторая производная функціи 36) будетъ равна нулю. Очевидно, что вообще только корни нечетной кратности уравненія 41) доставятъ maxima или minima функціи 36) и только они должны быть опредѣлены.

Присоединивъ въ максимальнымъ и минимальнымъ значеніямъ функціи 36) еще значенія ея при крайнихъ значеніяхъ β, указанныхъ неравенствами 29), мы изъ разсмотрѣнія знаковъ всѣхъ этихъ значеній убѣдимся въ отсутствіи или существованіи корней уравненій 34); притомъ въ послѣднемъ случаѣ дѣйствительные корни β представляется намъ *отдѣленными*, такъ что останется только ихъ вычислить вмѣстѣ съ соотвѣтствующими значеніями p_0 и p_1 и затѣмъ обратиться къ приложенію условій Лежандра и Якоби.

26. Замѣтимъ, что при вычисленіи maxima и minima функціи 36) можно обойтись безъ вычисленіа ξ, а опредѣлить прямо ν и μ изъ уравненій 39) и слѣдующаго, получаемаго изъ 37),

$$\frac{1}{y_0}\,\psi(\mu)=\frac{1}{y_1}\,\psi(\nu)\,.$$

Maxima и minima функціи 36) представятся при этомъ въ видѣ

$$\frac{\psi(\nu)}{\nu}-\frac{\psi(\mu)}{\mu}-\int_{\mu}^{\nu}\frac{\psi(p)}{\Theta(p)}\,dp\,,$$

который получается изъ 36) при посредствѣ уравненій 39) и 37).

Но иногда можно освободиться отъ вычисленія всѣхъ maxima и minima при посредствѣ слѣдующей теоремы:

Если $\nu > \mu > o$, то смежные minimum и maximum функціи 36) будутъ имѣть одинаковый знакъ, если minimum получается при меньшемъ значеніи β.

Чтобы доказать эту теорему, разсмотримъ производную по β функціи $\beta \int_\mu^\nu \frac{\psi(p)}{\Theta(p)} dp$. Эта производная будетъ

$$\int_\mu^\nu \frac{\psi(p)}{\Theta(p)} dp + \beta \left(\frac{\psi(\nu)}{\Theta(\nu)} \frac{\partial \nu}{\partial \beta} - \frac{\psi(\mu)}{\Theta(\mu)} \frac{\partial \mu}{\partial \beta} \right),$$

или, на основаніи уравненій a) n^0 24)

$$\int_\mu^\nu \frac{\psi(p)}{\Theta(p)} dp + \frac{1}{\beta} \left(\frac{y_0}{\mu} - \frac{y_1}{\nu} \right),$$

что приводится при посредствѣ уравненій 37) къ виду

$$\int_\mu^\nu \frac{\psi(p)}{\Theta(p)} dp - \left[\frac{\psi(\nu)}{\nu} - \frac{\psi(\mu)}{\mu} \right],$$

такъ что для значеній, соотвѣтствующихъ maximum или minimum функціи 36), значеніе разсматриваемой производной будетъ равно взятому съ обратнымъ знакомъ максимальному или минимальному значенію функціи 36); вообще же замѣняя разность въ скобкахъ интеграломъ $\int_\mu^\nu d\,\frac{\psi(p)}{p} = \int_\mu^\nu \left\{ \frac{\psi'(p)}{p} - \frac{\psi(p)}{p^2} \right\} dp$ и вставляя $\psi'(p) = p\,\frac{\psi(p)}{\Theta(p)}$, мы приведемъ разсматриваемую производную къ виду $\int_\mu^\nu \frac{\psi(p)}{p^2} dp$, изъ котораго явствуетъ, что она имѣетъ при $\nu > \mu > o$ только положительныя значенія.

Отсюда слѣдуетъ, что $\beta \int_{\mu}^{\nu} \frac{\psi(p)}{\Theta(p)} dp$ представляетъ возрастающую функцію β. Такъ какъ съ другой стороны функція 36) можетъ быть представлена въ видѣ

$$\frac{1}{\beta}\left(x_1 - x_0 - \beta \int_{\mu}^{\nu} \frac{\psi(p)}{\Theta(p)} dp\right).$$

и, вычитаемое въ скобкахъ для minimum будетъ менѣе нежели для maximum, то ясно, что оба эти значенія функціи 36) будутъ имѣть одинаковый знакъ.

27. Какъ замѣчено выше, намъ нужно найти только тѣ корни ξ уравненія 41), которые доставляютъ для β значенія заключенныя въ предѣлахъ, указанныхъ неравенствомъ 29). На этомъ основаніи иногда можно указать предѣлы искомыхъ корней.

Въ самомъ дѣлѣ неравенства 29) доставляютъ

$$\frac{1}{y_1} e^{Q} > \frac{1}{\beta} > \frac{1}{y_0} e^{P},$$

и въ силу уравненій 41) предѣльныя значенія ξ опредѣляется изъ условій

$$e^{Q} > \psi\left(\frac{y_1}{x_1 - \xi}\right), \quad e^{P} < \psi\left(\frac{y_0}{x_0 - \xi}\right).$$

или, переходя къ логариѳмамъ,

$$42) \qquad Q > \int^{\frac{y_1}{x_1 - \xi}} \frac{p\,dp}{\Theta(p)}, \quad P < \int^{\frac{y_0}{x_0 - \xi}} \frac{p\,dp}{\Theta(p)}.$$

Пусть, напримѣръ минимальное значеніе P интеграла $\int \frac{p\,dp}{\Theta(p)}$ получается при $p = p'$, а максимальное при $p = p''$; взявъ p' нижнимъ предѣломъ интеграла, будемъ имѣть $P = o$, и если функція $\frac{p}{\Theta(p)}$ остается всегда положительна и P и Q представляютъ ея единственныя minimum и maximum, то мы будемъ имѣть право заключить, что

$$\frac{y_1}{x_1 - \xi} < p'', \qquad \frac{y_0}{x_0 - \xi} > p'.$$

Если $\Theta(p)$ представляетъ положительную четную функцію p и притомъ $p' = o$, то два приведенныя неравенства замѣнятся однимъ слѣдующимъ

$$\left(\frac{y_1}{x_1 - \xi}\right)^2 < p''^2$$

и т. п.

Въ случаѣ, когда $\int \frac{p\,dp}{\Theta(p)}$ имѣетъ нѣсколько maxima и minima, легко выполнить соотвѣтствующія измѣненія результатовъ.

28. Что касается приложенія условія Лежандра, то объ этомъ было уже говорено въ n^0 15; но по поводу условія Якоби нужно сдѣлать слѣдующее замѣчаніе. Если вычислимъ ординату η точки пересѣченія касательныхъ, проведенныхъ къ разсматриваемой кривой въ точкахъ (x_0, y_0) и (x_1, y_1), то легко найдемъ

$$43) \qquad \eta \left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}\right) = x_1 - \frac{y_1}{p_1} - \left(x_0 - \frac{y_0}{p_0}\right),$$

такъ что знакъ η будетъ зависѣть отъ знака значенія функціи 38) при $\mu_1 = p_1$ и $\mu_0 = p_0$, равно какъ знака равности $\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}$. Если корень ξ уравненія 41) соотвѣтствуетъ минимуму функціи 36), то это значитъ, что при возрастаніи перемѣннаго $\frac{1}{\beta}$ (т. е. убываніи β) функція 38) переходитъ съ отрицательныхъ значеній на положительныя; если же корень ξ соотвѣтствуетъ максимуму той же функціи 36), то при убываніи β функція 38) переходитъ съ $+$ на $-$. Имѣя это въ виду, легко опредѣлить знакъ

η и затѣмъ, на основаніи n^0 16, во многихъ случаяхъ сдѣлать заключеніе о томъ, удовлетворяется ли условіе Якоби. При положительныхъ значеніяхъ y_0 и y_1, которыя мы разсматриваемъ, ордината η должна быть положительна; вслѣдствіе этого можно сгруппировать случаи, когда удовлетворяется условіе Якоби, въ слѣдующей таблицѣ, въ которой β_0 означаетъ ту величину β, которая вычисляется по формулѣ 41), а β корень уравненій 34):

A) корень ξ уравненія 41) соотвѣтствуетъ minimum:

$$\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1} < 0, \qquad \beta > \beta_0 .$$

$$\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1} > 0 \qquad \beta < \beta_0 .$$

B) корень ξ уравненія 41) соотвѣтствуетъ maximum:

$$\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1} < 0, \qquad \beta < \beta_0 .$$

$$\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1} > 0, \qquad \beta > \beta_0 .$$

29. Примѣнимъ теперь добытые нами общіе результаты изслѣдованія уравненія 24) къ нѣкоторымъ частнымъ случаямъ.

Примемъ, что

$$\Theta(p) = \frac{p^2 + c^2}{2k}, \tag{44}$$

откуда

$$\int_0^p \frac{p\,dp}{\Theta(p)} = k \int_0^p \frac{2p\,dp}{p^2 + c^2} = \log\left(1 + \frac{p^2}{c^2}\right)^k,$$

$$\psi(p) = \left(1 + \frac{p^2}{c^2}\right)^k$$

$$y = \pm \beta \left(1 + \frac{p^2}{c^2}\right)^k, \quad x - \alpha = \pm \frac{2k\beta}{c^2} \int_0^p \left(1 + \frac{p^2}{c^2}\right)^{k-1} dp.$$

$$\psi(x, y, p) = x - \frac{2ky}{c^2}\left(1 + \frac{p^2}{c^2}\right)^{-k} \int_0^p \left(1 + \frac{p^2}{c^2}\right)^{k-1} dp,$$

$$\sigma(x, y, p) = y\left(1 + \frac{p^2}{c^2}\right)^{-k},$$

$$\omega = \int \frac{dp}{\Theta(p)} = 2k \int_{\infty}^{p} \frac{dp}{p^2 + c^2} = -\frac{2k}{c}\, arc\cot \frac{p}{c}.$$

Отсюда $p = -c\cot\frac{c\,\omega}{2\,k}$ и слѣдовательно

$$y = \pm\beta \sin^{-2k}\frac{c\,\omega}{2\,k},\quad x - \alpha = \pm\beta \int_{\pm\frac{\pi k}{c}}^{\omega} \sin^{-2k}\frac{c\,\omega}{2\,k}\, d\omega.$$

Въ частныхъ предположеніяхъ относительно k получимъ слѣдующія кривыя, полагая $\pm\beta = 1$, $\alpha = o$:

$k = -\frac{3}{2}$; $\qquad c^2 x^2 = \left(1 - y^{\frac{2}{3}}\right)\left(2 + y^{\frac{2}{3}}\right)^2$;

$k = -1$; $\qquad x = \frac{1}{2c}(c\omega - \sin c\omega \pm \pi)$, $y = \frac{1}{2}(1 - \cos c\omega)$;

$k = -\frac{1}{2}$; $\qquad y^2 + c^2 x^2 = 1$;

$k = \frac{1}{2}$; $\qquad y = \frac{1}{2}\left(e^{cx} + e^{-cx}\right)$;

$k = 1$; $\qquad y - 1 = \frac{c^2 x^2}{4}$

30. Функція $\Theta(p)$ сохраняетъ постоянный знакъ при всѣхъ значеніяхъ p, именно знакъ постояннаго числа k; поэтому нужно разсмотрѣть два предположенія:

I) $k > o$, *выпуклая кривая*.

Въ этомъ случаѣ имѣемъ $P = o$ (при $p = o$), $Q = \infty$; поэтому неравенство 28) будетъ излишне, но 29) даетъ

$$45) \qquad o < \beta < y_0 .$$

Далѣе легко найти

$$\lambda(p) = \frac{2k}{c^2}\left(1 + \frac{p^2}{c^2}\right)^{-k}\int_0^p\left(1 + \frac{p^2}{c^2}\right)^{k-1} dp .$$

Очевидно, $\lambda(p)$ есть нечетная функція p, имѣющая положительныя значенія при $p > o$, а $1 - p\lambda(p)$ есть четная функція, такъ что если она имѣетъ положительный корень, то будемъ имѣть и отрицательный такой же абсолютной величины.

Теперь легко найдемъ

$$1 - p\lambda(p) = \frac{\left(1 + \frac{p^2}{c^2}\right)^k - \frac{2kp}{c^2}\int_0^p\left(1 + \frac{p^2}{c^2}\right)^{k-1} dp}{\left(1 + \frac{p^2}{c^2}\right)^k} ,$$

гдѣ числитель можетъ быть приведенъ къ виду

$$1 - \frac{2k}{c^2}\int_0^p dp\int_0^p\left(1 + \frac{p^2}{c^2}\right)^{k-1} dp .$$

Ясно, что максимальное значеніе $+1$ этотъ числитель получитъ при $p = o$; съ другой стороны при $p = \infty$ онъ будетъ безконеченъ какъ $-\frac{1}{2k-1}\frac{p^{2k}}{c^{2k}}$, если $k > \frac{1}{2}$, какъ $-p \log p$ при $k = \frac{1}{2}$ и какъ $-\frac{2kp}{c^2}\int_0^\infty\left(1 + \frac{p^2}{c^2}\right)^{k-1} dp$ при $k < \frac{1}{2}$: во всѣхъ случаяхъ онъ обращается въ $-\infty$. Отсюда слѣдуетъ, что разсматриваемый числитель несомнѣнно имѣетъ единственный положительный корень, который мы назовемъ ε. Для отдѣленія этого корня представимъ разсматриваемый числитель въ видѣ

$$-2k\left[\frac{1}{c^2}\int\limits_0^p dp\int\limits_0^p\left(1+\frac{p^2}{c^2}\right)^{k-1}dp-\frac{1}{2k}\right]$$

и замѣтивъ, что производная по k функціи, стоящей въ скобкахъ, сохраняетъ всегда положительный знакъ, заключимъ, что сама функція постоянно возрастаетъ и если при опредѣленныхъ значеніяхъ k и p она обращается въ нуль, то при большемъ k исчезаніе будетъ имѣть мѣсто только при меньшемъ прежняго значеніи p.

При $k=1$ будемъ имѣть $\varepsilon=c$; при $k=2$, $\varepsilon=c\sqrt{\sqrt{12}-3}$, и т. д.

При $k=\frac{1}{2}$ придется рѣшить уравненіе

$$\frac{p}{c}\log\left(\sqrt{1+\frac{p^2}{c^2}}+\frac{p}{c}\right)-\sqrt{1+\frac{p^2}{c^2}}=o,$$

которое преобразованіемъ $\frac{p}{c}=\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)$ приводится къ виду

$$\log r^2=2+\frac{4}{r^2-1}$$

и довольно легко доставляетъ значеніе $\varepsilon=c.\ 1{,}5088..=c.\tan 56^{\circ}28'$.

31. Теперь мы будемъ имѣть: $N=-\frac{1}{\varepsilon}$, $M=\frac{1}{\varepsilon}$ и неравенство 31) обратится въ слѣдующее:

$$46)\qquad \varepsilon^2(x_1-x_0)^2<(y_1+y_0)^2.$$

Затѣмъ уравненіе 41) будетъ

$$y_0^{-1}\left[1+y_0^2\,c^{-2}\,(x_0-\xi)^{-2}\right]^k=y_1^{-1}\left[1+y_1^2\,c^{-2}\,(x_1-\xi)^{-2}\right]^k,$$

или, возвышая обѣ части въ степень $\frac{1}{k}$ и перенося члены:

$$47)\quad y_0^{-\frac{1}{k}} - y_1^{-\frac{1}{k}} + y_0^{\frac{2k-1}{k}} c^{-2} (x_0 - \xi)^{-2} - y_1^{\frac{2k-1}{k}} c^{-2} (x_1 - \xi)^{-2} = o.$$

Неравенства 42) въ разсматриваемомъ случаѣ не доставятъ никакихъ ограниченій для ξ.

Разсмотримъ теперь два предположенія: 1) $x_0 < x_1$ и 2) $x_1 < x_0$.

32. Если $x_0 < x_1$, то первая часть уравненія 47) измѣняется отъ $y_0^{-\frac{1}{k}} - y_1^{-\frac{1}{k}} > o$ при $\xi = -\infty$ до $+\infty$ при $\xi = x_0$, затѣмъ обращается въ $-\infty$ при $\xi = x_1$ и наконецъ достигаетъ исходнаго значенія $y_0^{-\frac{1}{k}} - y_1^{-\frac{1}{k}}$ при $\xi = +\infty$. Ясно, что уравненіе 47) всегда имѣетъ два дѣйствительные корня: одинъ между x_0 и x_1 и другой, большій x_1.

Обращаясь къ производной первой части уравненія 47), которая будетъ

$$2c^{-2}\left(y_0^{\frac{2k-1}{k}} (x_0 - \xi)^{-3} - y_1^{\frac{2k-1}{k}} (x_1 - \xi)^{-3} \right),$$

замѣтимъ, что она имѣетъ единственный конечный дѣйствительный корень, именно

$$\xi' = \frac{y_1^{\frac{2k-1}{3k}} x_0 - y_0^{\frac{2k-1}{3k}} x_1}{y_1^{\frac{2k-1}{3k}} - y_0^{\frac{2k-1}{3k}}},$$

для котораго обѣ разности

$$x_0 - \xi' = y_0^{\frac{2k-1}{3k}} \frac{x_1 - x_0}{y_1^{\frac{2k-1}{3k}} - y_0^{\frac{2k-1}{3k}}},$$

$$x_1 - \xi' = y_1^{\frac{2k-1}{3k}} \frac{x_1 - x_0}{y_1^{\frac{2k-1}{3k}} - y_0^{\frac{2k-1}{3k}}}$$

будутъ очевидно одного знака, а вторая производная первой части уравненія 47) будетъ

$$6c^{-2}(y_0 y_1)^{-\frac{2k-1}{3k}}\left(y_1^{\frac{2k-1}{3k}} - y_0^{\frac{2k-1}{2k}}\right)^5 (x_1 - x_0)^{-4},$$

т. е. навѣрное отлична отъ нуля. При этомъ значеніе первой части уравненія 47) будетъ

$$48)\qquad y_0^{-\frac{1}{k}} - y_1^{-\frac{1}{k}} + \left(y_0^{\frac{2k-1}{3k}} - y_1^{\frac{2k-1}{3k}}\right)^3 c^{-2}(x_1 - x_0)^{-2}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что корень первой производной будетъ лежать внѣ промежутка отъ x_0 до x_1, именно будетъ болѣе x_1, если $k < \frac{1}{2}$, и менѣе x_0 если $k > \frac{1}{2}$; притомъ онъ будетъ опредѣлять дѣйствительный (положительный) maximum въ первомъ случаѣ и minimum во второмъ случаѣ.

При $k = \frac{1}{2}$ производная первой части уравненія 47) не имѣетъ конечнаго корня.

На основаніи этихъ результатовъ можемъ утверждать, что *при $k < \frac{1}{2}$ уравненіе 47) имѣетъ только два дѣйствительные корня ξ_0 и ξ_1, гдѣ $x_0 < \xi_1 < x_1 < \xi_1 < \xi'$; при $k > \frac{1}{2}$ кромѣ двухъ дѣйствительныхъ корней ξ_0 и ξ_1, удовлетворяющихъ неравенству $x_0 < \xi_0 < x_1 < \xi_1$ и существующихъ во всѣхъ случаяхъ, будутъ существовать, если выраженіе 48) отрицательно, еще два корня, меньшіе x_0 и отдѣленные между собою корнемъ первой производной ξ'.*

33. Замѣтимъ теперь, что функція 36) въ разсматриваемомъ случаѣ будетъ

$$49)\qquad \frac{x_1 - x_0}{\beta} - \frac{2k}{c^2}\int_{\mu}^{\nu}\left(1 + \frac{p^2}{c^2}\right)^{k-1} dp,$$

гдѣ

$$\frac{y_0}{\beta} = \left(1 + \frac{\mu^2}{c^2}\right)^k, \quad \frac{y_1}{\beta} = \left(1 + \frac{\nu^2}{c^2}\right)^k.$$

Такъ какъ уравненія 34), очевидно, требуютъ, чтобы было $p_1 > p_0$ и притомъ $p_1 > o$, то мы можемъ ограничиться разсмотрѣніемъ только положительной вѣтви функціи ν. Въ этомъ предположеніи крайнія значенія функціи 49) для обѣихъ вѣтвей μ, какъ легко убѣдиться, будутъ: $+\infty$ при $\beta = o$ и

$$50) \qquad \frac{x_1 - x_0}{y_0} - \frac{2k}{c^2} \int_0^c \sqrt{\left(\frac{y_1}{y_0}\right)^{\frac{1}{k}} - 1} \left(1 + \frac{p^2}{c^2}\right)^{k-1} dp$$

при $\beta = y_0$.

34. Разсмотримъ прежде отрицательную вѣтвь μ. Условія $o > \mu < \nu > o$ ограничиваютъ измѣняемость ξ на основаніи уравненій 40) предѣлами $x_0 < \xi < x_1$; поэтому намъ нужно вычислить только корень ξ_0 уравненія 47) и соотвѣтствующія ему значенія

$$\mu_0 = \frac{y_0}{x_0 - \xi_0}, \quad \nu_0 = \frac{y_1}{x_1 - \xi_0}, \quad \beta_0 = y_0 \left[1 + \frac{\mu_0^2}{c^2}\right]^{-k},$$

равно какъ минимальное значеніе функціи 49)

$$51) \qquad \frac{x_1 - x_0}{\beta_0} - \frac{2k}{c^2} \int_{\mu_0}^{\nu_0} \left(1 + \frac{p^2}{c^2}\right)^{k-1} dp.$$

Если этотъ minimum положителенъ, то будетъ положительно и значеніе 50) и функція 49) не будетъ имѣть искомаго корня; если значеніе 50) отрицательно, то и minimum 51) будетъ отрицателенъ и функція 49) будетъ имѣть одинъ корень, меньшій β_0; наконецъ, если выраженіе 50) положительно, а minimum 51) отрицателенъ, то функція 49) будетъ имѣть два корня, отдѣленныхъ между собою значеніемъ β_0.

35. Разсмотримъ теперь положительную вѣтвь μ. Условія $o < \mu < \nu$ доставятъ $\xi < x_0 - y_0 \dfrac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0}$; слѣдуетъ замѣтить, что написанное крайнее значеніе ξ болѣе ξ' и что при этомъ крайнемъ значеніи первая часть уравненія 47) будетъ имѣть положительный знакъ именно будетъ равна

$$52)\quad \left(y_0^{-\frac{1}{k}} - y_1^{-\frac{1}{k}}\right)\left[1 + c^{-2}(x_1 - x_0)^{-2}(y_1 - y_0)^2\right].$$

Если $k \leq \frac{1}{2}$, равно какъ и при $k > \frac{1}{2}$, если выраженіе 48) не отрицательно, уравненіе 47), какъ видѣли, не будетъ имѣть корней, меньшихъ x_0; слѣдовательно, функція 49) будетъ постоянно убывающею; и если ея значеніе 50) положительно, она не будетъ имѣть желаемаго корня, а если значеніе 50) отрицательно, то будетъ имѣть одинъ корень.

Если же $k > \frac{1}{2}$ и выраженіе 48) отрицательно, то, въ виду положительности 52), заключимъ, что уравненіе 47) будетъ имѣть два корня ξ_2 и ξ_3, гдѣ $\xi_3 < \xi' < \xi_2$. Вычислимъ по формуламъ 40) и 41) соотвѣтствующія значенія μ, ν, β и значенія функціи 49), именно

$$53)\quad \frac{x_1 - x_0}{\beta_2} - \frac{2k}{c^2}\int_{\mu_2}^{\nu_2}\left(1 + \frac{p^2}{c^2}\right)^{k-1} dp \quad (\text{minimum}),$$

$$54)\quad \frac{x_1 - x_0}{\beta_3} - \frac{2k}{c^2}\int_{\mu_3}^{\nu_3}\left(1 + \frac{p^2}{c^2}\right)^{k-1} dp \quad (\text{maximum})$$

и присоединимъ къ нимъ крайнія значенія ∞ и 51). Легко привести разсматриваемый minimum къ виду

$$\frac{y_0}{\beta_2}\left[\frac{x_1 - x_0}{y_0} - \frac{2k}{c^2}\,\frac{\beta_2}{y_0}\int_{\mu_2}^{\nu_2}\left(1 + \frac{p^2}{c^2}\right)^{k-1} dp\right],$$

изъ котораго явствуетъ, что если выраженіе 50) положительно, то и minimum 53) положителенъ, такъ что функція 49) не будетъ имѣть желаемаго корня. Если же выраженіе 50) отрицательно, то, замѣтивъ, что въ силу теоремы n^0 26, значенія 53) и 54) будутъ имѣть одинаковый знакъ, заключимъ, что функція 49) будетъ имѣть одинъ корень, который будетъ менѣе β_2, если 53) отрицательно, и болѣе β_3, если то же выраженіе положительно.

36. Примѣняя полученные результаты къ рѣшенію уравненій 34) и имѣя въ виду таблицу n^0 28, мы можемъ сдѣлать слѣдующія заключенія для случая $x_1 > x_0$.

Если выраженіе 50) положительно, то уравненія 34) будутъ имѣть дѣйствительныя рѣшенія только при условіи, что 51) отрицательно; при этомъ получаются двѣ системы рѣшеній: въ обѣихъ $p_0 < o$, $p_1 > o$, а корни β будутъ отдѣлены значеніемъ β_0; условію Якоби удовлетворяетъ только кривая, соотвѣтствующая корню $\beta > \beta_0$.

Если выраженіе 50), а слѣдовательно и 51), отрицательны, то уравненія 34) имѣютъ двѣ системы рѣшеній; въ одной $p_0 < o$, $p_1 > o$, $\beta < \beta_0$, въ другой $o < p_0 < p_1$. и только эта послѣдняя удовлетворяетъ условію Якоби.

Итакъ для возможности рѣшенія системы 34) въ случаѣ $x_1 > x_0$ необходимо и достаточно, чтобы minimum 51) былъ отрицательный.

37. Примемъ теперь, что $x_1 < x_0$. Уравненіе 47) необходимо будетъ имѣть два дѣйствительные корня: одинъ меньшій x_1, другой между x_1 и x_0. Корень производнаго уравненія ξ будетъ болѣе x_0, если $k > \frac{1}{2}$, и $\xi < x_1$, если $k < \frac{1}{2}$; если выраженіе 48) отрицательно и $k > \frac{1}{2}$, то будутъ существовать еще два корня, большіе x_0 и раздѣленные корнемъ ξ.

Для того, чтобы функція 49) могла исчезать, необходимо принять, что $\nu < \mu$, и такъ какъ для одного и того же значенія β функція ν численно болѣе μ, то слѣдуетъ взять только отрицательную вѣтвь функціи ν. Крайнее значеніе функціи 49) при $\beta = y_0$ въ настоящемъ случаѣ будетъ 50) съ противнымъ знакомъ, если примемъ, что разность $x_0 - x_1$ имѣетъ такую же величину какую имѣла прежде $x_1 - x_0$: крайнее значеніе при $\beta = o$ будетъ $-\infty$.

Разсматривая положительную вѣтвь μ, будемъ имѣть $x_0 > \xi > x_1$; соотвѣтственно корню ξ, заключенному между x_0 и x_1, получимъ maximum функціи 36), который представится выраженіемъ 50) съ противнымъ знакомъ. Заключенія n^0 34 сохраняютъ полную силу и въ настоящемъ случаѣ, если $x_1 - x_0$ замѣнимъ положительною величиною этой разности.

Разсматривая отрицательную вѣтвь μ, легко убѣдимся, что сохраняютъ свою силу и заключенія n^0 35, такъ что окончательный результатъ можемъ формулировать слѣдующимъ образомъ:

Существованіе дѣйствительныхъ рѣшеній системы уравненій

$$\frac{x_1 - x_0}{\beta} - \frac{2k}{c^2}\int_{p_0}^{p_1}\left(1+\frac{p^2}{c^2}\right)^{k-1}dp = o\,,$$

$$\beta = y_0\left(1+\frac{p_0^2}{c^2}\right)^{-k} = y_1\left(1+\frac{p_1^2}{c^2}\right)^{-k}$$

обусловливается неравенствомъ

$$55)\qquad \frac{2a}{\beta_0} - \frac{2k}{c^2}\int_{\mu_0}^{\nu_0}\left(1+\frac{p^2}{c^2}\right)^{k-1}dp < o\,,$$

гдѣ $2a$ представляетъ абсолютную величину $\pm(x_1 - x_0)$; если же это неравенство удовлетворено, то разсматриваемыя уравненія имѣютъ двѣ системы дѣйствительныхъ рѣшеній, изъ которыхъ условію Якоби удовлетворяетъ только одна, именно та, въ которой разность $\pm(p_1 - p_0)$ имѣетъ меньшую абсолютную величину.

Когда неравенство 55) обращается въ равенство, оно доставляетъ единственную систему рѣшеній, которая условію Якоби не удовлетворяетъ, ибо въ этомъ случаѣ функція 38) и ордината η обращаются въ нуль.

Этотъ результатъ въ теоретическомъ смыслѣ, конечно, вполнѣ удовлетворителенъ, но для приложеній неудобенъ, хотя бы уже по одному тому, что для примѣненія его приходится рѣшать уравненіе четвертой степени 47) и оперировать съ его корнемъ. Поэтому мы займемся преобразованіемъ условія 55) въ болѣе удобную для приложеній форму.

38. Неравенство 55) мы представимъ въ слѣдующемъ слегка измѣненномъ видѣ

$$56)\qquad \frac{2a}{\beta} - \frac{2k}{c^2}\int_{-\mu}^{\nu}\left(1+\frac{p^2}{c^2}\right)^{k-1}dp < o\,,$$

или, на основаніи преобразованія n^0 26,

$$57)\qquad \frac{1}{\nu}\left(1+\frac{\nu^2}{c^2}\right)^k - \frac{2k}{c^2}\int_0^{\nu}\left(1+\frac{p^2}{c^2}\right)^{k-1}dp + \frac{1}{\mu}\left(1+\frac{\mu^2}{c^2}\right)^k$$

$$- \frac{2k}{c^2}\int_0^{\mu}\left(1+\frac{p^2}{c^2}\right)^{k-1}dp < o\,,$$

гдѣ β, μ, ν суть положительные корни уравненій

$$2a = \frac{y_1}{\nu} + \frac{y_0}{\mu}\,,$$

$$\beta^{-\frac{1}{k}} = y_0^{-\frac{1}{k}}\left(1+\frac{\mu^2}{c^2}\right) = y_1^{-\frac{1}{k}}\left(1+\frac{\nu^2}{c^2}\right).$$

Если обозначимъ произведеніе $\mu\,\nu$ черезъ u, то первое уравненіе прямо доставитъ

$$58)\qquad y_1\,\mu + y_0\,\nu = 2\,a\,u\,,$$

а второе уравненіе приводится къ виду

$$c^2\left(y_1^{\frac{1}{k}} - y_0^{\frac{1}{k}}\right) = y_0^{\frac{1}{k}}\nu^2 - y_1^{\frac{1}{k}}\mu^2 = (y_1\,\mu + y_0\,\nu)\left(y_0^{\frac{1}{k}-1}\nu - y_1^{\frac{1}{k}-1}\mu\right)$$

$$-\left(y_1\,y_0^{\frac{1}{k}} - y_0\,y_1^{\frac{1}{k}}\right)\mu\,\nu.$$

и въ свою очередь доставляетъ

$$59)\quad y_1^{\frac{1}{k}-1}\mu - y_0^{\frac{1}{k}-1}\nu = \frac{1}{2a}\left(y_0 y_1^{\frac{1}{k}-1} - y_1 y_0^{\frac{1}{k}-1}\right) - \left(y_1^{\frac{1}{k}} - y_0^{\frac{1}{k}}\right)\frac{c^2}{2au}.$$

Изъ двухъ уравненій 58) и 59) получимъ слѣдующія раціональныя выраженія μ и ν черезъ u

$$\left(y_0^2 y_1^{\frac{1}{k}} + y_1^2 y_0^{\frac{1}{k}}\right)\mu = 2 y_1 y_0^{\frac{1}{k}} au - \left(y_1^2 y_0^{\frac{1}{k}} - y_0^2 y_1^{\frac{1}{k}}\right)\frac{y_0}{2a}$$
$$- \left(y_1^{\frac{1}{k}} - y_0^{\frac{1}{k}}\right)\frac{c^2 y_0^2 y_1}{2au},$$

$$\left(y_0^2 y_1^{\frac{1}{k}} + y_1^2 y_0^{\frac{1}{k}}\right)\nu = 2 y_0 y_1^{\frac{1}{k}} au + \left(y_1^2 y_0^{\frac{1}{k}} - y_0^2 y_1^{\frac{1}{k}}\right)\frac{y_1}{2a}$$
$$+ \left(y_1^{\frac{1}{k}} - y_0^{\frac{1}{k}}\right)\frac{c^2 y_0 y_1^2}{2au}.$$

Первое изъ этихъ равенствъ чрезъ умноженіе первой части на $\frac{\nu}{\nu}$ и замѣнѣ $\mu\nu$ черезъ u доставитъ выраженіе $\frac{1}{\nu}$ черезъ u; подобнымъ же образомъ изъ втораго равенства найдемъ выраженіе $\frac{1}{\mu}$. Перемножая два предыдущія равенства между собою, получимъ уравненіе четвертой степени относительно u, въ силу котораго каждая раціональная функція u, а также μ и ν, можетъ быть выражена цѣлою функціею u третьей или низшей степени или, если угодно, приведена къ виду

$$Au + B + \frac{C}{u+D}.$$

Возвышая въ квадратъ уравненіе 58), легко получимъ,

$$y_1^2\left(1 + \frac{\mu^2}{c^2}\right) + y_0^2\left(1 + \frac{\nu^2}{c^2}\right) = \frac{4a^2u^2}{c^2} - \frac{2y_0 y_1 u}{c^2} + y_0^2 + y_1^2,$$

откуда, при посредствѣ уравненія

$$y_1^{\frac{1}{k}}\left(1+\frac{\mu^2}{c^2}\right)=y_0^{\frac{1}{k}}\left(1+\frac{\nu^2}{c^2}\right),$$

найдемъ

$$y_0^{-\frac{1}{k}}\left(y_0^{\,2}y_1^{\frac{1}{k}}+y_1^{\,2}y_0^{\frac{1}{k}}\right)\left(1+\frac{\mu^2}{c^2}\right)=y_1^{-\frac{1}{k}}\left(y_0^{\,2}y_1^{\frac{1}{k}}+y_1^{\,2}y_0^{\frac{1}{k}}\right)\left(1+\frac{\nu^2}{c^2}\right)$$

$$=\frac{4a^2u^2}{c^2}-\frac{2y_0y_1u}{c^2}+y_0^{\,2}+y_1^{\,2}.$$

Отсюда получаемъ

$$\left(y_0^{\,2}y_1^{\frac{1}{k}}+y_1^{\,2}y_0^{\frac{1}{1}}\right)\sqrt{\left(1+\frac{\mu^2}{c^2}\right)\left(1+\frac{\nu^2}{c^2}\right)}$$

$$=(y_0y_1)^{\frac{1}{2k}}\left(\frac{4a^2u^2}{c^2}-\frac{2y_0y_1u}{c^2}+y_0^{\,2}+y_4^{\,2}\right),$$

$$\left(y_0^{\,2}y_1^{\frac{1}{k}}+y_1^{\,2}y_0^{\frac{1}{k}}\right)\mu^2=y_0^{\frac{1}{k}}(4a^2u^2-2y_0y_1u)-c^2y_0^{\,2}\left(y_1^{\frac{1}{k}}-y_0^{\frac{1}{k}}\right),$$

$$\left(y_0^{\,2}y_1^{\frac{1}{k}}+y_1^{\,2}y_0^{\frac{1}{k}}\right)\nu^2=y_1^{\frac{1}{k}}(4a^2u^2-2y_0y_1u)+c^2y_1^{\,2}\left(y_1^{\frac{1}{k}}-y_0^{\frac{1}{k}}\right).$$

Перемноженіе двухъ послѣднихъ уравненій доставляетъ упомянутое уравненіе четвертой степени въ видѣ

$$60)\quad\left(y_0^{\,2}y_1^{\frac{1}{k}}+y_1^{\,2}y_0^{\frac{1}{k}}\right)^2u^2=\left[y_0^{\frac{1}{k}}(4a^2u^2-2y_0y_1u)-c^2y_0^{\,2}\left(y_1^{\frac{1}{k}}-y_0^{\frac{1}{k}}\right)\right]$$

$$\left[y_1^{\frac{1}{k}}(4a^2u^2-2y_0y_1u)+c^2y_1^{\,2}\left(y_1^{\frac{1}{k}}-y_0^{\frac{1}{k}}\right)\right].$$

Это уравненіе замѣняетъ собою уравненіе 47) и можетъ быть изъ него получено. На основаніи окончательнаго результата n^o 32 можемъ утверждать, что уравненіе 60) несомнѣнно имѣетъ одинъ положительный и одинъ или три отрицательные корня. Въ силу этого можемъ сказать, что *положительный корень уравненія 60) долженъ доставлять положительныя значенія* μ *и* ν, *которыя удовлетворяютъ неравенству 57)*; или наоборотъ, *если неравенство 57) доставляетъ* $u > A$, *то при* $u = A$ *вторая часть уравненія 60) должна быть менѣе первой*, ибо только въ этомъ случаѣ уравненіе 60) будетъ имѣть корень большій A.

39. Первая часть неравенствъ 56) или 57) въ двухъ случаяхъ можетъ быть представлена какъ раціональная функція u, именно 1) когда k есть цѣлое число и 2) когда k есть половина нечетнаго числа.

Если k есть цѣлое число, то легко найти

$$\frac{1}{\nu}\left(1+\frac{\nu^2}{c^2}\right)^k - \frac{2k}{c^2}\int_0^\nu \left(1+\frac{p^2}{c^2}\right)^{k-1} dp = \frac{1}{\nu} - k_1\frac{\nu}{c^2} - \frac{1}{3}k_2\frac{\nu^3}{c^4}$$

$$-\frac{1}{5}k_3\frac{\nu^5}{c^6} - \ldots\ldots$$

гдѣ k_n представляетъ биномальный коэфиціентъ

$$\frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{1\,.\,2\ldots.n}.$$

Подставляя это и подобное выраженіе съ μ, получимъ возможность сократить первую часть неравенства 57) на положительнаго множителя $\mu+\nu$ и привести это неравенство къ виду

$$61)\qquad \frac{1}{u} - k_1\frac{1}{c^2} - \frac{1}{3}k_2\frac{\nu^2+\mu^2-u}{c^4}$$

$$-\frac{1}{5}k_3\frac{\nu^4+\mu^4-u(\nu^2+\mu^2)+u^2}{c^6} - \ldots < o,$$

гдѣ суммы четныхъ степеней μ и ν легко выражаются черезъ u.

Въ случаѣ параболы $k=1$, получимъ $u > c^2$, и для того чтобы вторая часть уравненія 60) была менѣе первой необходимо должно быть $a^2c^2 < y_0\,y_1$. Понятно, что для разсматриваемаго частнаго случая это условіе можетъ быть проще получено непосредственно изъ уравненія параболы.

40. Въ случаѣ, когда k равно половинѣ нечетнаго числа $\frac{2m+1}{2}$, будемъ имѣть

$$\frac{2m+1}{c^2}\int_0^{\nu}\left(1+\frac{p^2}{c^2}\right)^{m-\frac{1}{2}}dp=\frac{\nu}{c^2}\left\{\frac{2m+1}{2m}\left(1+\frac{\nu^2}{c^2}\right)^{m-\frac{1}{2}}\right.$$

$$+\frac{2m+1}{2m}\,\frac{2m-1}{2m-2}\left(1+\frac{\nu^2}{c^2}\right)^{m-\frac{3}{2}}+\ldots+\frac{2m+1}{2m}\,\frac{2m-1}{2m-2}\cdots$$

$$\left.\frac{3}{2}\left(1+\frac{\nu^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}+\frac{2m+1}{2m}\,\frac{2m-1}{2m-2}\cdots\frac{3}{2}\,\frac{1}{c^2}\int_0^{\nu}\frac{dp}{\sqrt{1+\frac{p^2}{c^2}}}$$

Замѣняя во второй части множителя $\frac{\nu}{c^2}$ черезъ $\frac{1}{\nu}\left(1+\frac{\nu^2}{c^2}-1\right)$, мы легко приведемъ неравенство 57) къ виду

$$-\frac{1}{2m}\left[\sigma_m+\frac{2m+1}{2m-2}\sigma_{m-1}+\ldots\ldots+\frac{2m+1}{2m-2}\,\frac{2m-1}{2m-4}\cdots\frac{5}{2}\sigma_1\right]$$

$$+\frac{2m+1}{2m}\,\frac{2m-1}{2m-2}\cdots\frac{3}{2}\left[\sigma_0-\frac{1}{c^2}\int_0^{\nu}\left(1+\frac{p^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}dp\right.$$

$$\left.-\frac{1}{c^2}\int_0^{\mu}\left(1+\frac{p^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}dp\right]<o,$$

гдѣ

$$\sigma_n=\frac{1}{\nu}\left(1+\frac{\nu^2}{c^2}\right)^{n+\frac{1}{2}}+\frac{1}{\mu}\left(1+\frac{\mu^2}{c^2}\right)^{n+\frac{1}{2}}.$$

Нетрудно убѣдиться, что σ_n дѣлится на σ_0 и даетъ въ частномъ

$$c^2\left\{1+\frac{u}{c^2}\sqrt{1+\frac{\mu^2}{c^2}}\sqrt{1+\frac{\nu^2}{c^2}}-\frac{u^2}{c^4}\right\}\frac{\left(1+\frac{\nu^2}{c^2}\right)^n-\left(1+\frac{\mu^2}{c^2}\right)^n}{\nu^2-\mu^2}$$

$$-c^2\left(1+\frac{\nu^2}{c^2}\right)\left(1+\frac{\mu^2}{c^2}\right)\frac{\left(1+\frac{\nu^2}{c^2}\right)^{n-1}-\left(1+\frac{\mu^2}{c^2}\right)^{n-1}}{\nu^2-\mu^2},$$

а это выраженіе, на основаніи формулъ n^0 38, приводится къ раціональной функціи u. Далѣе, полагая $\frac{p}{\sqrt{1+\frac{p^2}{c^2}}}=\frac{\nu z}{\sqrt{1+\frac{\nu^2}{c^2}}}$, будемъ имѣть

$$\int_0^\nu\left(1+\frac{p^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}dp=\int_0^1\frac{\nu\sqrt{1+\frac{\nu^2}{c^2}}}{1+\frac{\nu^2}{c^2}-\frac{\nu^2}{c^2}z^2}\,dz.$$

Подобнымъ же образомъ преобразуемъ интегралъ съ предѣломъ μ и, складывая интегралы, найдемъ

$$\int_0^\nu\left(1+\frac{p^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}dp+\int_0^\mu\left(1+\frac{p^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}dp=$$

$$=\sigma_0\int_0^1\frac{u\sqrt{1+\frac{\mu^2}{c^2}}\sqrt{1+\frac{\nu^2}{c^2}}-\frac{u^2z^2}{c^2}}{\left(1+\frac{\nu^2}{c^2}-\frac{\nu^2}{c^2}z^2\right)\left(1+\frac{\mu^2}{c^2}-\frac{\mu^2}{c^2}z^2\right)}\,dz.$$

Здѣсь подъинтегральная функція есть раціональная функція u, а потому первая часть неравенства 57), по сокращеніи на положительнаго множителя σ_0, обратится въ раціональную функцію u. Слѣдуетъ впрочемъ замѣтить, что приведеніе интеграла къ цѣлой функціи u сопряжено съ весьма утомительными вычисленіями.

II) $k < o$, *вогнутая кривая.*

41. Введемъ въ формулы $-k$ вмѣсто k. Значенія P и Q въ этомъ случаѣ будутъ $-\infty$ и o, такъ что условіе 28) отпадаетъ, а 29) даетъ

$$\beta > y_1 .$$

Функція $\lambda(p)$ будетъ постоянно убывающею отъ $+\infty$ до $-\infty$ функціею, а потому условіе 31) не будетъ имѣть мѣста; точно также неравенства 42) не доставляютъ ограниченій для ξ. Уравненіе 47) превращается въ слѣдующее

$$62) \quad y_0^{\frac{1}{k}} - y_1^{\frac{1}{k}} + y_0^{\frac{2k+1}{k}} c^{-2} (x_0-\xi)^{-2} - y_1^{\frac{2k+1}{k}} c^{-2} (x_1-\xi)^{-2} = o$$

и въ предположеніи $x_0 < x_1$ имѣетъ одинъ дѣйствительный корень ξ_0 меньшій x_0 и другой ξ_1 между x_0 и x_1. Первая производная первой части этого уравненія имѣетъ единственный дѣйствительный корень, меньшій x_0 и доставляющій отрицательный minimum; поэтому можемъ утверждать, что уравненіе имѣетъ единственный корень, меньшій x_0, именно заключенный между ξ' и x_0.

Уравненія 34) могутъ быть удовлетворены только въ предположеніи $p_0 > p_1$ и притомъ $p_0 > o$; поэтому намъ нужно разсмотрѣть функцію

$$63) \qquad \frac{2a}{\beta} + \frac{2k}{c^2} \int_{\mu}^{\nu} \left(1 + \frac{p^2}{c^2}\right)^{-k-1} dp ,$$

гдѣ

$$2a = x_1 - x_0 , \quad \frac{\beta}{y_0} = \left(1 + \frac{\mu^2}{c^2}\right)^k, \quad \frac{\beta}{y_1} = \left(1 + \frac{\nu^2}{c^2}\right)^k, \quad \mu > o.$$

Крайнія значенія этой функціи будутъ: при $\beta = y_1$

$$64) \qquad \frac{2a}{y_1} - \frac{2k}{c^2} \int_o^{c\sqrt{\left(\frac{y_1}{y_0}\right)^{\frac{1}{k}} - 1}} \left(1 + \frac{p^2}{c^2}\right)^{-k-1} dp ,$$

а при $\beta = \infty$ нуль, если $\nu > o$, и

$$-\frac{2k}{c^2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+\frac{p^2}{c^2}\right)^{k-1} dp.$$

при $\nu < o$.

42. Разсматривая положительную вѣтвь ν, изъ условій $o < \mu > \nu$, получимъ $x_0 > \xi > x_0 - \frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0}\, y_0$, гдѣ низшій предѣлъ будетъ болѣе, менѣе или равенъ ξ', если k болѣе, менѣе или равно 1.

Такъ какъ при этомъ низшемъ предѣлѣ ξ первая часть уравненія 62) будетъ отрицательна, именно равна

$$\left(y_0^{\frac{1}{k}} - y_1^{\frac{1}{k}}\right)\left[1 + c^{-2}(x_1 - x_0)^{-2}(y_1 - y_0)^2\right],$$

а при высшемъ предѣлѣ $\xi = x_0$ первая часть уравненія 62) равна $+\infty$, то ясно, что корень ξ_0 будетъ заключаться въ тѣхъ же предѣлахъ и найдя соотвѣтствующія ему значенія β_0, μ_0, ν_0 намъ нужно будетъ вычислить максимальное значеніе функціи 63), именно

$$65)\qquad \frac{x_1 - x_0}{\beta_0} + \frac{2k}{c^2}\int_{\mu_0}^{\nu_0}\left(1+\frac{p^2}{c^2}\right)^{-k-1} dp.$$

Такъ какъ это значеніе есть maximum функціи, обращающейся при $\beta = \infty$ въ нуль, то оно будетъ положительно, а потому *для того чтобы функція 63) могла исчезнуть при нѣкоторомъ конечномъ значеніи β, необходимо, чтобы ея крайнее значеніе 64) было отрицательно.*

Предположеніе $\mu > o$, $\nu < o$ доставляетъ несовмѣстимыя неравенства $\xi < x_0$, $\xi > x_1$, обнаруживающія, что функція 63) не имѣетъ maxima и minima, и потому, для того, чтобы она могла имѣть корень, необходимо, чтобы крайнія значенія ея были различныхъ знаковъ, т. е. чтобы значеніе 64) было положительно.

Итакъ *при $x_1 > x_0$, $y_1 > y_0$ существуетъ одна кривая разсматриваемаго рода, соединяющая данныя точки, для которой $p_0 > o$, а $p_1 > o$ или $< o$ смотря по тому, будетъ ли выраженіе 64) отрицательно или положительно.*

43. Если $x_1 < x_0$, то слѣдуетъ принять $\nu > \mu$ и притомъ $\mu < o$ или $\xi > x_0$. Предположеніе $\nu > o$ приводимъ къ несовмѣстимому съ прежнимъ неравенству $\xi < x_1$, а потому мы можемъ заключить, что функція 63) въ этомъ случаѣ не будетъ имѣть maxima и minima, такъ что для исчезанія ея необходимо, чтобы крайнія значенія ея были различныхъ знаковъ. Эти крайнія значенія будутъ только по своимъ знакамъ отличаться отъ приведенныхъ въ n^0 41, если подъ $2a$ будемъ понимать абсолютную величину разности $x_1 - x_0$: слѣдовательно исчезаніе функціи 63) будетъ возможно, только если выраженіе 64) положительно.

Предполагая $\nu < o$, изъ условія $\nu > \mu$ найдемъ

$\xi < x_0 + \dfrac{x_0 - x_1}{y_1 - y_0}\, y_0$ и это крайнее значеніе будетъ менѣе, равно или болѣе ξ' смотря по тому, будетъ k болѣе, равно или менѣе 1. Во всякомъ случаѣ между предѣлами для ξ будетъ заключаться корень уравненія 62), доставляющій отрицательный minimum функціи 63), а потому эта функція будетъ имѣть дѣйствительный корень только если ея крайнее значеніе при $\beta = y_1$ положительно, а слѣдовательно выраженіе 64) отрицательно.

Итакъ *существуетъ всегда одна вогнутая кривая разсматриваемаго рода, соединяющая двѣ данныя точки.*

44. Мы примемъ теперь

$$\Theta(p) = \frac{p^2}{2k},$$

откуда

$$\int_{\pm 1}^{p} \frac{p\,dp}{\Theta(p)} = k \int_{\pm 1}^{p} \frac{2p\,dp}{p^2} = k \log p^2,$$

$$\psi(p) = p^{2.k},$$

$$y = \pm \beta p^{2.k}, \quad x - \alpha = \pm \frac{2k}{2k-1} \beta p^{2k-1}.$$

Отсюда

$$\pm \beta y^{2k-1} = \left(\frac{2k-1}{2k}\right)^{2k} (x-\alpha)^{2k}$$

и это уравненіе представляетъ параболическія кривыя при $k > \frac{1}{2}$ и $k < o$ и гиперболическія при $o < k < \frac{1}{2}$. При $k = \frac{1}{2}$ будемъ имѣть

$$y = \pm \beta \sqrt{p^2}, \quad x - \alpha = \pm \beta \log \sqrt{p^2},$$

откуда получается уравненіе логариѳмической кривой

$$y = \pm \beta e^{\pm \frac{x-\alpha}{\beta}}.$$

Условія 28), 29) и 31) въ разсматриваемомъ случаѣ отпадаютъ, а уравненіе 41) приводится къ квадратному, именно

$$y_0^{\frac{2k-1}{k}} (x_1 - \xi)^2 - y_1^{\frac{2k-1}{k}} (x_0 - \xi)^2 = o.$$

Всѣ интеграціи выполняются въ конечномъ видѣ и все изслѣдованіе производится весьма просто.

45. Пусть теперь

$$\Theta(p) = \frac{p^2 - c^2}{2k},$$

откуда получимъ, сообразно двумъ предположеніямъ относительно p,

$$p^2 < c^2: \qquad \int_0^p \frac{p\,dp}{\Theta p} = k \log \left(1 - \frac{p^2}{c^2}\right),$$

$$y = + \beta \left(1 - \frac{p^2}{c^2}\right)^k, \qquad x - \alpha = + \frac{2k\beta}{c^2} \int_{p_0}^{p} \left(1 - \frac{p^2}{c^2}\right)^{k-1} dp;$$

$$p^2 > c^2: \qquad \int\limits_{\pm c\sqrt{2}}^{p} \frac{p\,dp}{\Theta(p)} = k \log\left(\frac{p^2}{c^2} - 1\right),$$

$$y = \pm\beta\left(\frac{p^2}{c^2} - 1\right)^k, \qquad x - \alpha_1 = \pm\frac{2k\beta}{c^2}\int\limits_{p_1}^{p}\left(\frac{p^2}{c^2} - 1\right)^{k-1} dp\,.$$

Пусть $k > o$. Выше оси x дифференціальному уравненію будутъ удовлетворять слѣдующіе отрѣзки, проходящіе черезъ двѣ точки оси x:

1°) вогнутый отрѣзокъ $y = \beta\left(1 - \frac{p^2}{c^2}\right)^k$, на которомъ $p^2 < c^2$ и который встрѣчаетъ ось x въ точкахъ $x = \alpha$ при $p = c$ и

$$x = x_1 = \alpha + \frac{2k\beta}{c^2}\int\limits_{-c}^{c}\left(1 - \frac{p^2}{c^2}\right)^{k-1} dp \quad \text{при } p = -c\,,$$

гдѣ принято $p_0 = c$;

2°) выпуклый отрѣзокъ $y = \beta\left(\frac{p^2}{c^2} - 1\right)^k$, на которомъ $p > c$ и который, начинаясь отъ оси x при $x = \alpha$, простирается въ безконечность; здѣсь принято $\alpha_1 = \alpha$, $p_1 = c$;

3°) выпуклый отрѣзокъ $y = \beta\left(\frac{p^2}{c^2} - 1\right)^k$, на которомъ $p < -c$ и который, начинаясь отъ оси x при $x = \alpha$, простирается въ безконечность; здѣсь $\alpha_1 = \alpha$, $p_1 = -c$;

4°) выпуклый отрѣзокъ $y = \beta\left(\frac{p^2}{c^2} - 1\right)^k$, на которомъ $p < -c$ и который, начинаясь при $x = x_1$, простирается въ безконечность; здѣсь $\alpha_1 = x_1$, $p_1 = -c$;

5°) выпуклый отрѣзокъ $y = \beta\left(\frac{p^2}{c^2} - 1\right)^k$, на которомъ $p > c$ и который начинается при $x = x_1$, причемъ $\alpha_1 = x_1$, $p_1 = c$.

Къ этимъ пяти отрѣзкамъ нужно прибавить еще четыре прямыя съ угловыми коэффиціентами $\pm c$, проходящія черезъ точки $x = \alpha$ и $x = x_1$ оси x.

Черезъ каждую изъ двухъ произвольно избранныхъ точекъ оси x можно провести такимъ образомъ пять вѣтвей, удовлетворяющихъ дифференціальному уравненію и лежащихъ выше оси x. Переходъ съ одной изъ нихъ на другую выполняется съ сохраненіемъ непрерывности ординаты; но если къ этому условію присоединимъ еще 1) условіе непрерывности p и 2) условіе однозначности ординаты, то при совокупности этихъ условій продолженіе каждой вѣтви можетъ быть получено только по другую сторону оси x. Такъ за продолженіе вогнутаго отрѣзка отъ точки $x = \alpha$ въ отрицательную сторону оси можно принять или a) выпуклый отрѣзокъ, симметричный съ 3°) и представляемый уравненіемъ $y = -\beta\left(\frac{p^2}{c^2} - 1\right)^k$, гдѣ $p > c$, $p_1 = c$, $\alpha = \alpha_1$; или b) вогнутый отрѣзокъ $y = -\beta\left(1 - \frac{p^2}{c^2}\right)^k$, гдѣ $p^2 < c^2$, $p_0 = c$; или c) прямую $y = c\,(x - \alpha)$. За продолженіе того же вогнутаго отрѣзка отъ точки $x = x_1$ можно взять или a') выпуклый отрѣзокъ, симметричный съ 5°) и представляемый уравненіемъ $y = -\beta\left(\frac{p^2}{c^2} - 1\right)^k$ при $p < -c$; или b') вогнутый отрѣзокъ $y = -\beta\left(1 - \frac{p^2}{c^2}\right)^k$ при $p^2 < c^2$, $p_0 = -c$, когда α замѣнимъ чрезъ x_1; или c') прямую $y = -c\,(x - x_1)$.

Обращаясь къ разсмотрѣнію q, будемъ имѣть

$$p^2 < c^2: \qquad q = \pm \frac{c^2}{2k\beta}\left(1 - \frac{p^2}{c^2}\right)^{1-k}.$$

$$p^2 > c^2: \qquad q = \pm \frac{c^2}{2k\beta}\left(\frac{p^2}{c^2} - 1\right)^{1-k}.$$

Если къ тремъ вышеупомянутымъ условіямъ прибавимъ еще четвертое, въ силу котораго q должна оставаться непрерывною или имѣть прерывность полярнаго характера, то при $k < 1$ выборъ одного изъ трехъ продолженій кривой не будетъ опредѣленъ, ибо на всѣхъ продолженіяхъ $q = o$ при $p^2 = c^2$; но при $k = 1$, въ случаѣ параболы, продолженіями будутъ служить только a) и a'), тогда какъ при $k > 1$ за продолженія можно принять только a и a'), если k есть дробь съ нечетными числителемъ и знаменателемъ, и только b), b') есть k есть дробь съ нечетнымъ числителемъ и четнымъ знаменателемъ; въ случаѣ же, когда k имѣетъ четный числитель но нечетный знаменатель, продолженіе кривой ниже оси x не будетъ существовать. Такой же выборъ продолженій долженъ быть сдѣланъ и при $k < 1$, если примемъ, что q обращается въ нуль алгебрическаго характера.

Подобныя же соображенія должны служить и при опредѣленіи продолженій выпуклыхъ отрѣзковъ.

Замѣтимъ однако, что при рѣшеніи вопросовъ варіаціоннаго исчисленія, связанныхъ съ уравненіемъ $yq = \frac{p^2 - c^2}{2k}$, намъ не придется прибѣгать къ выбору продолженій, такъ какъ въ силу условія Лежандра p^2 не будетъ переходить черезъ c^2.

При $k < o$ разсматриваемому уравненію будутъ удовлетворять кривыя, расположенныя между парою асимптотъ на подобіе сопряженныхъ гиперболъ, которыя дѣйствительно получаются при $k = -\frac{1}{2}$.

Остановившись подробно на изслѣдованіи кривыхъ, удовлетворяющихъ уравненію $yq = \frac{p^2 + c^2}{2k}$, мы позволимъ себѣ ограничиться приведенными замѣчаніями относительно кривыхъ, удовлетворяющихъ уравненію $yq = \frac{p^2 - c^2}{2k}$.

46. Подобно уравненію 24) можно составить другое дифференціальное уравненіе втораго порядка для данной кривой, которому она будетъ удовлетворять какъ представительница семейства подобныхъ кривыхъ, имѣющихъ центръ подобія на оси y. Конечное уравненіе такого семейства будетъ $F\left(\frac{x}{\beta}, \frac{y-\alpha}{\beta}\right) = o$

и по исключеніи произвольныхъ постоянныхъ оно приведетъ къ дифференціальному уравненію вида

$$x q = \Theta(p).$$

При превращеніи данной кривой въ подобную съ центромъ подобія на одной изъ осей, или вообще подобно расположенную, очевидно, $\frac{dy}{dx} = p$ будетъ инваріантомъ, ибо, полагая $x_1 = \frac{x-\alpha}{\beta}$, $y_1 = \frac{y-\alpha_1}{\beta}$, будемъ имѣть $\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{dy}{dx}$. Замѣтимъ кстати, что легко найти общее выраженіе инваріанта подобныхъ кривыхъ и дифференціальное уравненіе четвертаго порядка, которому удовлетворяютъ кривыя, подобныя данной. Такъ какъ линейные размѣры подобныхъ кривыхъ пропорціональны, то, называя черезъ ρ и s, ρ_1 и s_1 радіусы кривизны и периметры подобныхъ кривыхъ, будемъ имѣть $\rho = k\rho_1$, $s - \alpha = k s_1$, откуда $\frac{d\rho}{ds} = \frac{d\rho_1}{ds_1}$. Если примемъ далѣе, что существенное уравненіе данной кривой есть $F(s_1, \rho_1) = o$, то для подобной кривой будемъ имѣть $F\left(\frac{s-\alpha}{k}, \frac{\rho}{k}\right) = o$, откуда получимъ, подобно 24), дифференціальное уравненіе вида

$$\rho \frac{d^2\rho}{ds^2} = \Theta\left(\frac{d\rho}{ds}\right).$$

47. Относя данную кривую $F(x, y) = o$ къ произвольному началу координатъ, получимъ ея уравненіе въ видѣ $F(x + \alpha, y + \beta) = o$, откуда найдемъ для кривой дифференціальное уравненіе втораго порядка вида

$$q = \Theta(p).$$

48. Наконецъ разсматривая данную кривую какъ представительницу подобныхъ, но неподобно расположенныхъ кривыхъ съ центромъ подобія въ началѣ координатъ и представляя ея урав-

ненie въ полярныхъ координатахъ въ видѣ $F(\log r, \varphi) = o$, получимъ уравненie семейства въ видѣ $F(\log r + \log k, \varphi + \alpha) = o$, откуда, подобно n^0 47, найдемъ дифференцiальное уравненie въ полярныхъ координатахъ

$$\frac{d^2 \log r}{d\varphi^2} = \Theta\left(\frac{d \log r}{d\varphi}\right).$$

Инварiантомъ въ этомъ случаѣ будетъ, очевидно, уголъ касательной съ радiусомъ векторомъ, выражающiйся черезъ $\frac{d \log r}{d\varphi}$.

49. Вообще, имѣя конечное уравненie какой нибудь кривой $y = f(x)$, мы будемъ разсматривать эту кривую какъ представительницу семейства кривыхъ $y_1 = f(x_1)$, гдѣ

$$y_1 = \tau(x, y, \alpha, \beta), \qquad x_1 = \sigma(x, y, \alpha, \beta)$$

и функцiи τ и σ при нѣкоторой системѣ значенiя α и β, напримѣръ $\alpha = o$, $\beta = 1$, обращаются въ y, x. При данной функцiи $f(x)$, очевидно, всегда можно найти дифференцiальное уравненie втораго порядка чрезъ исключенie α и β изъ уравненiя $\tau = f(\sigma)$ и двухъ другихъ получающихся изъ него чрезъ дифференцированie; но при нѣкоторыхъ опредѣленныхъ свойствахъ функцiй τ и σ можно получить дифференцiальныя уравненiя опредѣленнаго *вида*, независящаго отъ частныхъ свойствъ функцiи $f(x)$. Это обстоятельство будетъ имѣть мѣсто въ томъ случаѣ, когда можно составить инварiанты перваго и втораго порядка $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$ и $F_1\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right)$, ибо изъ уравненiй

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = F[\sigma, \ f(\sigma), f'(\sigma)],$$

$$F_1\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = F_1[\sigma, f(\sigma), f'(\sigma), f''(\sigma)]$$

можно заключить о существованiи дифференцiальнаго уравненiя вида

$$F_1\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = \Theta\left[F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)\right].$$

50. **Изъ выраженій y_1 и x_1 находимъ**

$$p_1 = \frac{dy_1}{dx_1} = \left(\frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} p\right) : \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\partial \sigma}{\partial y} p\right)$$

и отсюда заключимъ, что если инваріантъ существуетъ, то онъ будетъ имѣть видъ

$$\frac{M + Np}{P + Qp} = \frac{M_1 + N_1 p_1}{P_1 + Q_1 p_1}$$

гдѣ M, N, P, Q суть опредѣленныя функціи x, y, а M_1, N_1, P_1, Q_1, значенія тѣхъ же функцій по замѣнѣ x и y на x_1 и y_1.

Полагая

$$M\,dx + N\,dy = \mu\,d\upsilon, \quad P\,dx + Q\,dy = \nu\,du,$$

мы превратимъ предыдущее равенство въ слѣдующее:

$$\frac{\mu}{\nu}\,\frac{d\upsilon}{du} = \frac{\mu_1}{\nu_1}\,\frac{d\upsilon_1}{du_1},$$

откуда заключимъ, что если инваріантъ перваго порядка существуетъ, то, измѣняя координаты x, y въ новыя u, υ, можемъ представить его въ видѣ $f(u, \upsilon)\dfrac{d\upsilon}{du}$, гдѣ $f(u, \upsilon)$ означаетъ приведенную къ перемѣннымъ u, υ дробь $\dfrac{\mu}{\nu}$.

Этотъ видъ инваріанта, очевидно, возможенъ только въ предположеніи $u_1 = \varphi(u, \alpha, \beta)$, $\upsilon_1 = \varphi_1(\upsilon, \alpha, \beta)$, и мы будемъ имѣть

66) $$f(u, \upsilon) \,.\, \varphi'(u, \alpha, \beta) = f(u_1, \upsilon_1) \,.\, \varphi_1'(\upsilon, \alpha, \beta).$$

Изъ этого функціональнаго уравненія нужно опредѣлить функціи f, φ и φ_1, пользуясь тѣмъ соображеніемъ, что инваріантъ вида $F(u, \upsilon)$ не можетъ существовать, такъ что получивъ уравненіе вида

67) $$F(u, \upsilon) = F(u_1, \upsilon_1),$$

мы должны будемъ изъ него заключить, что $F(u, v) =$ пост.

51. Логариѳмируя равенство 66) и затѣмъ дифференцируя его по u и v, получимъ

$$\frac{\partial^2 \log f(u, v)}{\partial u\, \partial v} = \frac{\partial^2 \log f(u_1, v_1)}{\partial u_1\, \partial v_1}\, \phi'(u, \alpha, \beta)\,.\,\phi_1'(v, \alpha, \beta).$$

Логариѳмируя это новое равенство и дифференцируя, найдемъ

$$\frac{\partial^2}{\partial u\, \partial v} \log \frac{\partial^2 \log f(u, v)}{\partial u\, \partial v} = \frac{\partial^2}{\partial u_1\, \partial v_1} \log \frac{\partial^2 \log f(u_1, v_1)}{\partial u_1\, \partial v_1}\,.\,\phi'(u, \alpha, \beta)\,.\,\phi_1'(v, \alpha, \beta)$$

и, дѣля это уравненіе на предыдущее, получимъ уравненіе вида 67), такъ что будемъ имѣть

$$68)\qquad \frac{\partial^2}{\partial u\, \partial v} \log \frac{\partial^2 \log f(u, v)}{\partial u\, \partial v} = 2a\, \frac{\partial^2 \log f(u, v)}{\partial u\, \partial v},$$

гдѣ $2a$ абсолютно постоянная величина.

Полагая $2a\, \dfrac{\partial^2 \log f(u, v)}{\partial u\, \partial v} = z$, превратимъ уравненіе 68) въ слѣдующее

$$\frac{\partial^2 \log z}{\partial u\, \partial v} = z,$$

интегралъ котораго найденъ Ліувиллемъ *) и можетъ быть представленъ въ видѣ

$$z = 2\,\chi'(u)\,.\,\chi_1'(v) : [\chi(u) + \chi_1(v)]^2,$$

гдѣ $\chi(u)$ и $\chi_1(v)$ двѣ произвольныя функціи.

Замѣняя здѣсь z его значеніемъ, получимъ по двукратной интеграціи

$$f^{-a} = \chi_2(u)\,.\,\chi_3(v)\,.\,[\chi(u) + \chi_1(v)],$$

---

*) Journal de mathématiques, 1 série, t. XVIII, p. 71.

гдѣ $\chi_2(u)$ и $\chi_3(v)$ двѣ новыя произвольныя функціи.

52. Послѣ этого уравненіе 66) доставитъ

69) $$\phi'(u)^{-a}\,\frac{\chi_2(u)}{\chi_2(u_1)}\,.\,\phi_1'(v)^a\,\frac{\chi_3(v)}{\chi_3(v_1)}\,[\chi(u)+\chi_1(v)]=\chi(u_1)+\chi_1(v_1),$$

гдѣ первая часть имѣетъ видъ $\lambda(u)\,.\,\lambda_1(v)+\lambda_2(u)\,.\,\lambda_3(v)$. Дифференцированіе этого уравненія по u и v приведетъ къ результату

$$\lambda'(u)\,.\,\lambda_1'(v)+\lambda_2'(u)\,.\,\lambda_3'(v)=o\,,$$

откуда найдемъ

$$\frac{\lambda'(u)}{\lambda_2'(u)}=-\frac{\lambda_3'(v)}{\lambda_1'(v)}=A\,,$$

гдѣ A постоянное, которое вообще зависитъ отъ α и β. Отсюда найдемъ по интеграціи

$$\lambda(u)-A\,\lambda_2(u)=B,\qquad \lambda_3(v)+A\,\lambda_1(v)=C;$$

т. е.

70) $$\begin{cases}\phi'(u)^{-a}\,\chi_2(u)\,[\chi(u)-A]=B\,\chi_2(u_1)\,,\\ \phi_1'(v)^a\,\chi_3(v)\,[\chi_1(v)+A]=C\,\chi_3(v_1)\,.\end{cases}$$

Подстановка опредѣленныхъ отсюда значеній $\chi(u)$ и $\chi_1(v)$ въ первую часть уравненія 69) приводитъ къ результату

71) $$B\,\phi_1'(v)^a\,\frac{\chi_3(v)}{\chi_3(v_1)}-\chi_1(v_1)=\chi(u_1)-C\,\phi'(u)^{-a}\,\frac{\chi_2(u)}{\chi_2(u_1)}=D,$$

который въ соединеніи съ формулами 70) доставитъ

72) $$\begin{cases}[\chi(u)-A]\,[\chi(u_1)-D]=B\,C,\\ [\chi_1(v)+A]\,[\chi_1(v_1)+D]=B\,C.\end{cases}$$

53. Уравненіе 66) распалось такимъ образомъ на четыре уравненія 70) и 71) или 72). Что касается этихъ четырехъ уравненій, то они содержатъ: 1) четыре функціи одного аргумента, обозначенныя буквою χ; нѣкоторыя изъ этихъ функцій, равно какъ и всѣ онѣ, могутъ быть постоянными, только $\chi_2(u)$, $\chi_3(v)$ и $\chi(u)+\chi_1(v)$ должны быть отличны отъ нуля; кромѣ того, если $\chi(u)=$ пост., то, очевидно, мы можемъ, не нарушая общности вида функціи f, положить въ тоже время и $\chi_1(v)=$ пост., и принять $\alpha=\pm 1$; 2) двѣ функціи $\phi(u,\alpha,\beta)$ и $\phi_1(v,\alpha,\beta)$,

изъ которыхъ каждая зависитъ отъ двухъ или трехъ аргументовъ, въ числѣ которыхъ необходимо находятся u и v; 3) четыре функціи A, B, C, D аргументовъ α и β; нѣкоторыя изъ этихъ функцій могутъ зависѣть только отъ одного аргумента или просто обращаться въ постоянныя числа. Вслѣдствіе этихъ особенностей состава *десяти* упомянутыхъ функцій мы можемъ получить для нѣкоторыхъ изъ нихъ опредѣленныя выраженія, не смотря на кажущуюся недостаточность *четырехъ* уравненій.

Въ самомъ дѣлѣ, по отношенію къ перемѣннымъ u и v разсматриваемыя четыре уравненія, очевидно, распадаются на двѣ независимыя пары, такъ что рѣшеніе одной изъ нихъ получится изъ рѣшенія другой чрезъ простую перемѣну буквъ. Разсматривая пару, содержащую u, мы чрезъ дифференцированіе уравненія 72) найдемъ

$$\varphi'(u, \alpha, \beta) = -\chi'(u)\left[\chi(u_1) - D\right] : \chi'(u_1)\left[\chi(u) - A\right],$$

вслѣдствіе чего 70) обратится въ соотношеніе между u и u_1. Дифференцируя это соотношеніе и вставляя только что найденное выраженіе $\varphi'(u)$, получимъ новое соотношеніе между u и u_1 и т. д. Получивъ четыре такія соотношенія между u и u_1 и присоединивъ къ нимъ 72), мы будемъ имѣть возможность исключить A, B, C, D и придемъ къ соотношенію, которое будетъ содержать *только* u и u_1. Это соотношеніе должно быть тождествомъ по отношенію къ u и u_1, ибо въ противномъ случаѣ оно доставило бы выраженіе u_1 въ функціи u безъ произвольныхъ параметровъ α и β, что противорѣчитъ нашему предположенію. Изъ разсмотрѣнія этого тождества и, если нужно, частнаго дифференцированія его по u, можно получить рядъ уравненій, содержащихъ только перемѣнное u и опредѣляющихъ функціи $\chi(u)$ и $\chi_2(u)$ съ произвольными абсолютно постоянными. Намъ не удалось выполнить этого общаго вычисленія въ довольно простой формѣ и мы ограничимся только сдѣланнымъ указаніемъ его возможности; вмѣсто того мы разсмотримъ частный случай, когда уравненія 72) не могутъ опредѣлять производныхъ $\varphi'(u)$ и $\varphi_1'(v)$.

54. Примемъ $B = o$, откуда въ силу перваго уравненія 70), $\chi(u) = A$, такъ что A должно быть абсолютно постоянное.

Второе уравненіе 70) обнаруживаетъ, что C будетъ отлично отъ нуля, ибо въ противномъ случаѣ мы имѣли бы $\chi_1(v) = -A$ и $\chi(u) + \chi_1(v) = o$, что невозможно: но второе уравненіе 72) даетъ $\chi_1(v) = -D$, такъ что D будетъ абсолютно постоянное число, отличное отъ A; ничто не мѣшаетъ принять $D = o$, и кромѣ того, какъ замѣчено выше, $a = -1$. Вторыя уравненія 70) и 71) будутъ въ этихъ предположеніяхъ

$$\frac{\phi'(u)}{\chi_2(u_1)} = \frac{A}{C} \cdot \frac{1}{\chi_2(u)}, \qquad \chi_3(v_1) \cdot \phi'(v_1) = \frac{A}{C}\, \chi_3(v)$$

и доставятъ по интеграціи, если обозначимъ

$$\frac{C}{A} \text{ черезъ } \beta, \quad \int \frac{du}{\chi_2(u_1)} \text{ черезъ } \xi(u), \quad \int \chi_3(v)\, dv \text{ чрезъ } \xi_1(v),$$

$$\xi(u_1) = \frac{\xi(u) + \alpha}{\beta}, \quad \xi_1(v_1) = \frac{\xi_1(v) + \gamma}{\beta}.$$

Этими уравненіями, при произвольныхъ функціяхъ ξ и ξ_1, опредѣляются u_1 и v_1.

55. Когда инваріантъ перваго порядка $f(u, v) \dfrac{dv}{du}$ извѣстенъ, то легко найти также инваріантъ втораго порядка.

Взявъ дифференціалъ равенства

$$f(u, v)\, \frac{dv}{du} = f(u_1, v_1)\, \frac{dv_1}{du_1}$$

и дѣля его на $du = \dfrac{1}{\phi'(u)} \cdot du_1$, получимъ

$$\frac{\partial f}{\partial u}\, \frac{dv}{du} + \frac{\partial f}{\partial v} \left(\frac{dv}{du}\right)^2 + f \cdot \frac{d^2 v}{du^2} = \left[\frac{\partial f}{\partial u_1} \cdot \frac{dv_1}{du_1} + \frac{\partial f}{\partial v_1} \left(\frac{dv_1}{du_1}\right)^2 \right.$$
$$\left. + f(u_1, v_1)\, \frac{d^2 v_1}{du_1^{\,2}}\right] \phi'(u).$$

Допустимъ теперь, что существуетъ равенство

$$f_1(u_1, v_1) = f_1(u, v) \cdot \phi_1'(v);$$

дифференцируя его по u, найдемъ

$$\frac{\partial f_1(u_1, v_1)}{\partial u_1}\, \phi'(u) = \frac{\partial f_1(u, v)}{\partial u}\, \phi_1'(v)$$

и отсюда, въ соединеніи съ 66), получимъ

$$f(u, v)\ \frac{\partial f_1 (u, v)}{\partial u} = k,$$

гдѣ k абсолютно постоянное. Это уравненіе позволяетъ опредѣлить функцію $f_1(u, v)$, зная которую, получимъ искомый инваріантъ втораго порядка

$$\left[\frac{\partial f(u, v)}{\partial u}\ \frac{dv}{du} + \frac{\partial f(u, v)}{\partial v} \left(\frac{dv}{du}\right)^2 + f(u, v)\ \frac{d^2 v}{du^2}\right] . f_1(u, v)\ f(u, v)$$

Въ случаѣ, разсмотрѣнномъ въ n^0 54, слѣдуетъ принять $\gamma = o$ и тогда будемъ имѣть

$$\frac{\xi_1'\ )}{\xi(v_1)}\ \phi_1'(v) = \frac{\xi_1'(v)}{\xi(v)},$$

такъ что $f_1(u, v) = \frac{\xi_1(v)}{\xi_1'(v)}$. Инваріантъ перваго порядка будетъ

$$\frac{\xi_1'(v)}{\xi'(u)}\ \frac{dv}{du},$$

инваріантъ втораго порядка

$$\frac{\xi_1(v)}{'\xi(u)}\ \frac{d}{du}\left[\frac{\xi_1'(v)}{\xi'(u)}\ \frac{dv}{du}\right],$$

и дифференціальное уравненіе будетъ

$$\frac{\xi_1(v)}{\xi'(u)}\ \frac{d}{du}\left[\frac{\xi_1'(v)}{\xi'(u)}\ \frac{dv}{du}\right] = \Theta\left[\frac{\xi_1'(v)}{\xi'(u)}\ \frac{dv}{du}\right],$$

или

$$\xi_1(v)\ \frac{d^2 \xi_1(v)}{d\xi(u)^2} = \Theta\left[\frac{d\xi_1(v)}{d\xi(u)}\right],$$

что въ сущности есть уравненіе 24).

56. Мы закончимъ это изслѣдованіе рѣшеніемъ одного вопроса, находящагося въ связи съ приложеніемъ условія maximum или minimum, даннаго Якоби.

Если

$$1) \qquad q = \varphi(x, y, p)$$

есть дифференціальное уравненіе 2-го порядка и

$$2) \qquad \psi(x, y, p) = \alpha, \quad \omega(x, y, p) = \beta$$

его первые интегралы, то для приложенія условія Якоби необходимо разсмотрѣть значенія отношенія $\frac{\partial y}{\partial \beta} : \frac{\partial y}{\partial \alpha}$. Считая въ уравненіяхъ 2) перемѣнными величинами y, p, α, β и дифференцируя въ этомъ предположеніи названныя уравненія частнымъ образомъ по α и β, будемъ имѣть

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial \psi}{\partial p}\,\frac{\partial p}{\partial \alpha} = 1, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial \beta} + \frac{\partial \psi}{\partial p}\,\frac{\partial p}{\partial \beta} = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial \sigma}{\partial p}\,\frac{\partial p}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial \beta} + \frac{\partial \sigma}{\partial p}\,\frac{\partial p}{\partial \beta} = 1,$$

откуда безъ труда найдемъ значенія $\frac{\partial y}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial y}{\partial \beta}$ и получимъ

$$\frac{\partial y}{\partial \beta} : \frac{\partial y}{\partial \alpha} = -\frac{\partial \psi}{\partial p} : \frac{\partial \sigma}{\partial p}.$$

При посредствѣ уравненій 2) необходимо выразить $\frac{\partial \psi}{\partial p} : \frac{\partial \sigma}{\partial p}$ въ функціи одного перемѣннаго, за которое можно принять безразлично x, y, p или какую нибудь опредѣленную функцію этихъ перемѣнныхъ, напримѣръ абсциссу точки пересѣченія касательной съ осью x, т. е. $x - \frac{y}{p}$. Обозначая эту абсциссу черезъ γ, будемъ имѣть

$$\frac{\partial y}{\partial \beta} : \frac{\partial y}{\partial \alpha} = -\frac{\partial \psi}{\partial p} : \frac{\partial \sigma}{\partial p} = F(\alpha, \beta, \gamma).$$

Предѣлы для γ опредѣлятся изъ условія, что функція $F(\alpha, \beta, \gamma)$ не должна получать всѣхъ возможныхъ числовыхъ значеній.

Вопросъ, рѣшеніемъ котораго мы займемся, состоитъ въ опредѣленіи дифференціальнаго уравненія 1), для котораго $F(\alpha, \beta, \gamma)$ есть линейная функція γ. Въ этомъ случаѣ наоборотъ γ выразится линейно чрезъ $\frac{\partial \psi}{\partial p} : \frac{\partial \sigma}{\partial p}$, т. е.

$$\gamma = x - \frac{y}{p} = f(\alpha, \beta) + f_1(\alpha, \beta)\,\frac{\partial \psi}{\partial p} : \frac{\partial \sigma}{\partial p}.$$

и это уравненіе должно обратиться въ тождество по замѣнѣ α и β функціями ψ и σ, такъ что

$$x - \frac{y}{p} = \left[f(\psi, \sigma)\,\frac{\partial \sigma}{\partial p} + f_1(\psi, \sigma)\,\frac{\partial \psi}{\partial p} \right] : \frac{\partial \sigma}{\partial p}.$$

57. Называя черезъ $\mu(\psi, \sigma)$ интегрирующаго множителя двучлена

$$f(\psi, \sigma)\, d\sigma + f_1(\psi, \sigma)\, d\psi$$

и обозначая интегралъ черезъ $f_2(\psi, \sigma)$, будемъ имѣть

$$\mu \frac{\partial \sigma}{\partial p}\left(x - \frac{y}{p}\right) = \frac{\partial f_2(\psi, \sigma)}{\partial p},$$

гдѣ $f_2(\psi, \sigma)$ будетъ интеграломъ уравненія 1), а потому можетъ быть замѣнена просто функціей ψ.

Итакъ, достаточно разсмотрѣть уравненіе

$$\text{a)} \qquad \frac{\partial \psi}{\partial p} = \mu \,.\left(x - \frac{y}{p}\right) \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial p}\,.$$

Замѣтивъ теперь, что уравненія 2), какъ интегралы одного и того же уравненія втораго порядка, должны доставлять одинаковыя значенія q, будемъ имѣть

$$\frac{\partial \psi}{\partial p} : \frac{\partial \sigma}{\partial p} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + p\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) : \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} + p\frac{\partial \sigma}{\partial y}\right),$$

въ силу чего получимъ

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + p\frac{\partial \psi}{\partial y} = \mu \,.\left(x - \frac{y}{p}\right)\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} + p\frac{\partial \sigma}{\partial y}\right).$$

Дифференцируя это уравненіе по p, а уравненіе (a) по x и y, получимъ возможность исключить $\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x\, \partial p}$ и $\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial y\, \partial p}$, и придемъ къ слѣдующимъ уравненіямъ

$$\text{b)} \quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \mu\left[\left(x - \frac{2y}{p}\right)\frac{\partial \sigma}{\partial x} - y\frac{\partial \sigma}{\partial y}\right], \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} &= \mu\left[\frac{y}{p^2}\,\frac{\partial \sigma}{\partial x} + x\frac{\partial \sigma}{\partial y}\right], \\ \frac{\partial \psi}{\partial p} &= \mu\left(x - \frac{y}{p}\right)\frac{\partial \sigma}{\partial p}. \end{aligned}\right.$$

58. Изъ этихъ уравненій можно получить двоякія выраженія вторыхъ производныхъ $\frac{\partial^2 \psi}{\partial y \, \partial p}$, $\frac{\partial^2 \psi}{\partial p \, \partial x}$, $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \, \partial y}$; сравнивая эти выраженія между собою, получимъ

$$
c) \left\{ \begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \sigma}{\partial p \, \partial x} + p \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y \, \partial p} + \frac{p}{y} \frac{\partial \sigma}{\partial p} - \frac{2 \partial \sigma}{p \partial x} + \frac{\partial \log \mu}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial p} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} + p \frac{\partial \sigma}{\partial y} \right) = o, \\
&\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} + 2p \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \, \partial y} + p^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} + \frac{2p}{y} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} + p \frac{\partial \sigma}{\partial y} \right) \\
&\qquad + \frac{\partial \log \mu}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} + p \frac{\partial \sigma}{\partial y} \right)^2 = o.
\end{aligned} \right.
$$

Эти два уравненія будутъ условія интегрируемости полнаго дифференціальнаго уравненія

$$d \psi - \frac{\partial \psi}{\partial x} dx - \frac{\partial \psi}{\partial y} dy - \frac{\partial \psi}{\partial p} dp = o,$$

и должны быть удовлетворены независимо отъ значенія функціи ψ. Отсюда слѣдуетъ, что если $\frac{\partial \log \mu}{\partial \sigma}$ содержитъ ψ, то необходимо должно быть

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} + p \frac{\partial \sigma}{\partial y} = o ,$$

что, въ соединеніи съ прочими условіями, доставитъ $\sigma =$ произв. ф. $x - \frac{y}{p}$. Далѣе уравненія (b) въ этомъ случаѣ даютъ

$$d \psi = \mu \, . \, \phi' \left(x - \frac{y}{p} \right) . \, d \left(x - \frac{y}{p} \right) ,$$

что представляетъ связь между ψ и σ, которая не можетъ существовать. Въ силу этого предположеніе, что $\frac{\partial \log \mu}{\partial \sigma}$ зависитъ отъ ψ не можетъ имѣть мѣста.

Если примемъ, что $\frac{\partial \log \mu}{\partial \sigma}$ не зависитъ отъ ψ, то это будетъ значить, что μ представляется произведеніемъ $\phi(\psi) \, . \, \phi_1(\sigma)$: въ такомъ случаѣ взявъ вмѣсто интегральныхъ уравненій 2) нѣкоторыя функціи ихъ, можно принять $\mu = 1$. Послѣ этого второе условіе (c) можетъ быть интегрируемо и доставитъ

$$\sigma = \frac{1}{yp} F(p, \gamma) + F_1(p, \gamma),$$

гдѣ F и F_1 суть двѣ произвольныя функціи двухъ аргументовъ. Вставляя это значеніе σ въ первое условіе интегрируемости (c), найдемъ

$$p^3 \frac{\partial F_1}{\partial p} = \frac{\partial F}{\partial \gamma},$$

откуда заключимъ, что при совершенно произвольной функціи $\Sigma(p, \gamma)$ можно принять

$$F(p, \gamma) = p^3 \frac{\partial \Sigma}{\partial p}, \quad F_1(p, \gamma) = \frac{\partial \Sigma}{\partial \gamma},$$

такъ что

$$\sigma = \frac{p^2}{y} \frac{\partial \Sigma}{\partial p} + \frac{\partial \Sigma}{\partial \gamma}.$$

Послѣ этого по производнымъ функціи ψ найдемъ самую функцію, именно

$$\psi = \gamma \left(\frac{p^2}{y} \frac{\partial \Sigma}{\partial p} + \frac{\partial \Sigma}{\partial \gamma} \right) - \Sigma.$$

Искомое нами дифференціальное уравненіе втораго порядка будетъ

$$\left[p^4 \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial p^2} + 2py \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial p \, \partial \gamma} + y^2 \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \gamma^2} + 2p^3 \frac{\partial \Sigma}{\partial p} \right] yq = p^5 \frac{\partial \Sigma}{\partial p}.$$

Варшава, 20 ноября 1885 г. (*)

(*) Хотя А. Ю. Давидовъ, которому посвящена эта статья по случаю празднованія тридцатипятилѣтняго юбилея его профессорской дѣятельности, скончался 22 декабря 1885 г., тѣмъ не менѣе автору казалось приличнымъ сохранить посвященіе, на которое было получено имъ согласіе покойнаго. 18 февраля 1886 года.